2025 年度春学期「解析力学」講義ノート（暫定版）

原田知広*[1]

2025 年 4 月 26 日

*[1] 立教大学理学部物理学科: harada@rikkyo.ac.jp

概要

これは 2025 年度の「解析力学」の講義ノートです。講義ノートでは解析力学のミニマムしか扱いませんので、解析力学に関する網羅的な知識を得ることを目指しません。基本的な考え方をしっかり身につけることを目標にしています。そのため非常に基礎的な問題を付けています。教科書 [1] と併用して学習を進めて下さい。

これは暫定版ですので誤りがあるかもしれません。また皆さんの質問等に対してコメントも入れていきます。随時更新してこちらに置いておきます。

https://www2.rikkyo.ac.jp/web/harada/kaisekirikigaku_lecturenotes_2025.pdf

目次

第 1 章

Lagrangian と最小作用の原理 (1)

1.1　Newton の運動方程式

慣性系において、粒子の質量を m、位置を $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ とすると[*1]、Newton の運動方程式

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F} \tag{1.1.1}$$

が成り立つ。ここで

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} \tag{1.1.2}$$

は加速度である。

ここで $\boldsymbol{F}$ が保存力であるとき、ある関数 $U(\boldsymbol{x})$ の勾配を用いて、

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\ U = -\nabla U \tag{1.1.3}$$

と書くことができる。ここで $U = U(\boldsymbol{x})$ はポテンシャル（エネルギー）と呼ばれる。このとき、

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 \tag{1.1.4}$$

を運動エネルギーといい、[*2]

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 + U(\boldsymbol{x}) = T + U \tag{1.1.5}$$

[*1] ここではベクトルは太字で表す。ベクトル $\boldsymbol{x}$ と座標 x は全く異なるものを表すので、ベクトルを書く際には絶対に太字にする必要がある。

[*2] 運動エネルギーを表すのに T という文字の他にも K という文字も使われたりするが、本来はどんな文字でもいいはずである。どの文字が使われているかにあまり惑わされないようにしよう。

をエネルギーという。エネルギーは保存する。なぜなら

$$\because \quad \frac{dE}{dt} = m\ddot{\boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} + \nabla U\cdot\dot{\boldsymbol{x}} = (m\ddot{\boldsymbol{x}} + \nabla U)\cdot\dot{\boldsymbol{x}} = 0 \tag{1.1.6}$$

だからである。

ここで多変数関数の数学について復習する。2 変数関数 $f(x, y)$ の場合、$x = a + \Delta x$、$y = b + \Delta y$ として、Δx, Δy は十分小さいとする。このとき、f を x についてだけ Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} f(a+\Delta x, b+\Delta y) &= f(a, b+\Delta y) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b+\Delta y)\Delta x \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b+\Delta y)(\Delta x)^2 + O((\Delta x)^3) \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

となる。さらに y についても Taylor 展開すると、

多変数関数の Taylor 展開

$$\begin{aligned} f(a+\Delta x, b+\Delta y) &= \left[f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(\Delta y)^2\right] \\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\Delta y\right]\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \\ &\quad + O((\Delta x)^3, (\Delta x)^2(\Delta y), (\Delta x)(\Delta y)^2, (\Delta y)^3) \\ &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\Delta x\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\Delta y^2 \\ &\quad + O((\Delta x)^3, (\Delta x)^2(\Delta y), (\Delta x)(\Delta y)^2, (\Delta y)^3) \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

となる。f が N 変数関数であるときも同様である。

式 (1.1.8) で $\Delta f = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)$ とし、変位 Δx, Δy を無限小変位 dx, dy とし、対応する Δf を df とすると、

関数の全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{1.1.9}$$

が得られる。これを f の全微分という。

t をパラメータとする $(x, y) = (x(t), y(t))$ という曲線に沿った f の t 微分は、

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{1.1.10}$$

で得られる。[*3] f の勾配

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{1.1.11}$$

を用いると、

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \nabla f \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \tag{1.1.12}$$

が得られる。 f が N 変数関数、つまり $f = f(x_1, \cdots, x_N)$ であるときも同様に

関数の曲線に沿った微分

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \nabla f \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \tag{1.1.13}$$

と書ける。ここで

Einstein の規約

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \tag{1.1.14}$$

のように和の記号を省略する。

1.2 最小作用の原理

いま N 自由度の系 $\{q_1(t), \cdots, q_N(t)\} = \{q_i\}_{i=1,\cdots,N}$ を考えよう。[*4]そして、$\{q_i\}$ と $\{\dot{q}_i\}$ と t の関数、$L = L(q_1, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_N, t)$ を考え、これを Lagrangian という名前をつけておく。これは $N + N + 1 = 2N + 1$ 変数関数である。今後煩雑さを避けるた

[*3] ここで常微分 $\frac{df}{dt}$ と偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ は全く違う意味であることに注意しよう。$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ は単純な偏微分であるが、常微分 $\frac{df}{dt}$ は曲線 $(x(t), y(t))$ に沿った微分である。一般に多変数関数 f の常微分 $\frac{d}{dt}$ は曲線に沿った微分であると考えておこう。

[*4] 一般化座標 q としては、初等力学では質点の位置ベクトルのデカルト座標 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ を使うことが多いが、物理系の一般化座標というのは系の状態を表す変数としていろいろなものが可能である。たとえば、1 質点系であっても位置を球座標で表した (r, θ, ϕ) や円筒座標で表した (ρ, z, ϕ) でもよい。2 質点 A, B の場合は 6 自由度あり、q として $(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = (x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B)$ をとることもできる。

め、単に q、$\dot{q}$、$L = L(q, \dot{q}, t)$ などと書いていくことがある。q_i を一般化座標といい、

$$p_i := \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.2.1}$$

を q_i に共役な一般化運動量という。[*5] この関数の形に応じて力学が決まる。

今一旦 Newton 力学を忘れて、関数 $q(t)$ は以下の原理（公理）によって Lagrangian から決まると認めよう。

最小作用の原理

$t = t_1$ と $t = t_2$ における q の値を

$$q(t_1) = q^{(1)}, \quad q(t_2) = q^{(2)} \tag{1.2.2}$$

と指定したとき、$t_1 < t < t_2$ における系の運動は、作用汎関数

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \ L(q(t), \dot{q}(t), t) \tag{1.2.3}$$

が停留するように決まる。

ここで、汎関数というのは関数の関数のことである。作用汎関数は、単に作用とよばれることの方がより一般的である。停留するということについては次の章で詳しく説明する。

Newton 力学では $L = T - U$ で与えられる。

1.2.1 演習問題

1. 質量 m の質点がポテンシャル $U(\boldsymbol{x})$ で表される保存力を受けているときの Lagrangian を求めよ。
2. 次の Lagrangian について

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} f(t) \dot{q}^2 - \frac{1}{2} h(t) q^2 \tag{1.2.4}$$

   (a) どのような物理系に対応するだろうか？
   (b) q に共役な一般化運動量を求めよ。

[*5] 式 (1.2.1) における偏微分は関数 $L(q, \dot{q}, t)$ の独立変数である $(2N+1)$ 変数のうち q_i 以外のすべての変数 $q_1, \cdots, q_{i-1}, q_{i+1}, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_N, t$ を定数であるかのように扱って q_i だけで微分をとるという意味である。$\dot{q}_i$ も q_i とは独立な変数として扱っていることに注意する。

第 2 章

Lagrangian と最小作用の原理 (2)

2.1　Euler-Lagrange 方程式

最小作用の原理をもう少し詳しく説明しよう。いま $t_1 \le t \le t_2$ に t の関数 q が与えられているとする。この q は系のなんらかの時間変化を表す経路であると考えて良い。つぎに、この関数 q を微小に変化させて同じ区間に $\tilde{q}$ という新しい関数を考えよう。そこで $\delta q(t) := \tilde{q}(t) - q(t)$ とおけば $\tilde{q} = q + \delta q$ と書くことができる。ここで $\tilde{q}$ という経路が実際に物理的に起こることは想定されていないことに注意しよう。このような仮想的な変化のことを変分といい、δ を使うのが慣例である。

ここで変化させる前の経路 q に対して作用 $S[q]$ が決まり、変化させたあとの経路 $\tilde{q} = q + \delta q$ に対しても作用 $S[q + \delta q]$ が決まる。その差を

$$\delta S[q] := S[q + \delta q] - S[q] \tag{2.1.1}$$

とおくと、δq が十分小さければ Taylor 展開によって $\delta S[q]$ は δq の一次から始まる冪展開で書けるだろう。

ここで $S[q]$ が停留するとは、$\delta S[q]$ が δq の 1 次まででではどんな δq をとっても 0 になるということである。[*1]では (1.2.3) を使って具体的に計算してみよう。$q(t) + \delta q(t)$ に対す

[*1] 簡単な例として 2 変数関数 $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ を考えよう。この関数の x, y に対する変分は

$$\delta f = f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y) = 2x\delta x - 4y\delta y + (\delta x)^2 - 2(\delta y)^2 \tag{2.1.2}$$

である。δf がいかなる δx、δy に対しても、δx と δy の一次まででで 0 であるという停留条件をつけると、$x = y = 0$ が得られる。これは $f(x, y)$ の鞍点になっている。鞍点とは、ある方向で見れば極大点だが別の方向から見れば極小点となるような点のことである。一般に停留条件を満たす点を停留点というが、これは極大点あるいは極小点あるいは鞍点などに対応する。作用汎関数 $S[q]$ は $t_1 < t < t_2$ を満たす連続無限個の t に対する $q(t)$ を引数とする関数とみなせるから、最小作用の原理は S の無限次元空間

る作用を考える。ただし、$\tilde{q}(t_1) = q(t_1)$、$\tilde{q}(t_2) = q(t_2)$ であるから、

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{2.1.3}$$

である。L を Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} &L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t) \\ &= L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}, t)\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t)\delta\dot{q} + \cdots . \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

ここで $\cdots$ は δq の 2 次以上の項である。以下、$(q, \dot{q}, t)$ は省略する。すると、δq の 1 次までで

$$\begin{aligned} \delta S[q] &= S[q + \delta q] - S[q] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)\delta q \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right]\delta q + \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)\delta q \right]_{t_1}^{t_2} . \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

ここで (2.1.3) より最後の項は 0 になる。従って、任意の δq に対して $\delta S[q]$ の 1 次が 0 になるための必要十分条件は、

Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{2.1.6}$$

である。 これを Euler-Lagrange (E-L) 方程式という。

2.1.1 演習問題

1. 保存力が働く 1 質点系

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - U(\boldsymbol{x}) \tag{2.1.7}$$

に対して Euler-Lagrange 方程式を立てよ。[*2]

$\{q(t)\}_{t_1<t<_2}$ での停留点が実現することを主張する。

[*2] この問題によって、Lagrangian (2.1.7) は最小作用の原理のもとで Newton の運動方程式 (1.1.1) と等価であることが示される。

2. 糸の長さが ℓ の単振り子の Lagrangian $L = L(\theta, \dot{\theta})$ を求め、Euler-Lagrange 方程式を立て、$\ddot{\theta}$ を θ で表せ。[*3]

2.2 Lagrangian の不定性

Lagrangian には次のような不定性がある。

Lagrangian の不定性

$L(q, \dot{q}, t)$ に対して関数 $G(q, t)$ を用いて、

$$\tilde{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}G(q, t) \tag{2.2.1}$$

としても、E-L 方程式は変わらない。

実際、

$$\begin{aligned}
\tilde{S}[q] &:= \int_{t_1}^{t_2} dt\tilde{L}(q(t), \dot{q}(t), t) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dtL(q(t), \dot{q}(t), t) + \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}G(q(t), t) \\
&= S[q] + [G(q(t), t)]_{t_1}^{t_2}
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

において、両辺の q による変分をとると、

$$\delta\tilde{S}[q] = \delta S[q] + \delta\left[G(q(t), t)\right]_{t_1}^{t_2} \tag{2.2.3}$$

となるが、右辺の最後の項は $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ より、

$$\delta\left[G(q(t), t)\right]_{t_1}^{t_2} = \delta G(q(t_2), t_2) - \delta G(q(t_1), t_1) = 0. \tag{2.2.4}$$

よって、式 (2.2.2) の両辺の変分は

$$\delta\tilde{S}[q] = \delta S[q] \tag{2.2.5}$$

となる。これにより、$\tilde{L}$ でも L でも E-L 方程式は同じになる。ここで、Lagrangian の不定性を表す項における時間微分は常微分で書かれていることに注意しよう。これは曲線

[*3] 厳密解は第 1 種楕円積分によって表される。

$q=q(t)$ に沿った微分であるので $q=q(t)$ として $G(q(t),t)$ を t で微分する必要がある。従って、Lagrangian には

$$\frac{d}{dt}G(q,t)=\frac{\partial G}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial G}{\partial t} \tag{2.2.6}$$

という項を足す不定性がある。

2.2.1 演習問題

1. 次の Lagrangian

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-U(x) \tag{2.2.7}$$

に対して、$G(x,t)=ax^2+bt^5+ctx$ と置くことによって、L と等価な Lagrangian

$$\tilde{L}=L+\frac{d}{dt}G(x,t) \tag{2.2.8}$$

を求めよ。

2. 2 次元平面上で s をパラメータとする曲線 $(x,y)=(x(s),y(s))$ の $s=0$ から $s=1$ までの長さ S は

$$S=\int_0^1 ds\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \tag{2.2.9}$$

である。この曲線の両端を $(x(0),y(0))=(0,0)$, $(x(1),y(1))=(a,b)$ と固定したときに長さ S が最小となる曲線を求めよ。ただしドットは s による微分である。

第 3 章

対称性をもつ Lagrangian (1)

3.1 対称性と Lagrangian

Lagrangian が物理法則を支配する。従って、Lagrangian を決めることが物理法則を決めることになる。Lagrangian を決める方針として有効なのが対称性を尊重して決めることである。

3.2 時間並進対称性

時間並進対称性

$q(t)$ が E-L 方程式の解であるとき、任意の定数 a_0 に対して $q(t+a_0)$ も解であるならば、この系には時間並進対称性があるという。

次の定理が成り立つ。

時間に陽には依存しない Lagrangian

Lagrangian が時間に陽には依存しないとき、系には時間並進対称性がある。

Proof. いま L が陽には t に依存しない、つまり $L(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q})$ であるとしよう。まず $q(t)$ が E-L 方程式

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t),\dot{q}(t))\right]-\frac{\partial L}{\partial q}(q(t),\dot{q}(t))=0 \tag{3.2.1}$$

の解であると仮定する。つぎに E-L 方程式の左辺に $q(t+a_0)$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t+a_0),\dot{q}(t+a_0))\right]-\frac{\partial L}{\partial q}(q(t+a_0),\dot{q}(t+a_0))\\
&=\frac{d}{d\tilde{t}}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(\tilde{t}),\dot{q}(\tilde{t}))\right]-\frac{\partial L}{\partial q}(q(\tilde{t}),\dot{q}(\tilde{t}))=0
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

が言える。ただし、任意の定数 a_0 に対して、$\tilde{t}=t+a_0$ とおき、$d\tilde{t}=dt$ であることを使った。最後の等号が成り立つのは、式 (3.2.1) の t をただ $\tilde{t}$ と書き直しただけの式だからである。つまり、$q(t+a_0)$ も E-L 方程式の解である。従って、系が時間並進対称性をもつことが言えた。 □

では Lagrangian が t に陽に依存する場合はどうなるか。まず $q(t)$ が E-L 方程式の解であると仮定する。すなわち、

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t),\dot{q}(t),t)\right]-\frac{\partial L}{\partial q}(q(t),\dot{q}(t),t)=0 \tag{3.2.3}$$

であるとする。この場合、$q(t+a_0)$ を E-L 方程式の左辺に代入して、$\tilde{t}=t+a_0$ を使って書き直すと、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t+a_0),\dot{q}(t+a_0),t)\right]-\frac{\partial L}{\partial q}(q(t+a_0),\dot{q}(t+a_0),t)\\
&=\frac{d}{d\tilde{t}}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(\tilde{t}),\dot{q}(\tilde{t}),\tilde{t}-a_0)\right]-\frac{\partial L}{\partial q}(q(\tilde{t}),\dot{q}(\tilde{t}),\tilde{t}-a_0)
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

となる。ここで Lagrangian が t に陽に依存する場合には、(3.2.3) が満たされていても (3.2.4) がゼロになる保証はない。従って、$q(t+a_0)$ は E-L 方程式を満たさない。すなわち、系には時間並進対称性はない。

3.3 空間並進対称性

ここでは N 質点系を考え、一般化座標 q として $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1,2,\cdots,N}$ をとる。ここで $\boldsymbol{x}_n$ は n 番目の質点のデカルト座標での 3 次元位置ベクトルを表す。[*1] このときの Lagrangian は $L(\boldsymbol{x}_n,\dot{\boldsymbol{x}}_n,t)$ と書ける。本当は N 個並べて書かなければならないが、第 n 番目で代表させる。

[*1] これは便宜上のためである。本来は質点系である必要もないし一般化座標 q をデカルト座標にする必要もない。しかしその場合は空間並進変換が q においてどのような変換にあたるのかを予め調べる必要がある。

空間並進対称性

$\{\boldsymbol{x}_n(t)\}_{n=1,2,\cdots,N}$ が E-L 方程式の解であるときに、任意の定数ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\{\boldsymbol{x}_n(t)+\boldsymbol{a}\}_{n=1,2,\cdots,N}$ も解であれば、系は空間並進対称性があるという。

ここで、どの質点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_n$ に対しても同じ $\boldsymbol{a}$ という定数ベクトルを足して $\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{a}$ としていることに注意しよう。

このとき次の定理が成り立つことが直ちにわかる。

空間並進対称性をもつ Lagrangian

任意の定数ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、Lagrangian $L(\boldsymbol{x}_n,\dot{\boldsymbol{x}}_n,t)$ が

$$L(\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{a},\dot{\boldsymbol{x}}_n,t)=L(\boldsymbol{x}_n,\dot{\boldsymbol{x}}_n,t)+\frac{d}{dt}G(\boldsymbol{x}_n,t;\boldsymbol{a}) \tag{3.3.1}$$

を満たすような関数 $G(\boldsymbol{x}_n,t;\boldsymbol{a})$ をもつとき、系は空間並進対称性をもつ。

[*2]

3.3.1 演習問題

1. つぎの場合に空間並進対称性が成り立つことを示せ。【ヒント：(3.3.1) を満たす $G(\boldsymbol{x},t)$ が存在することを示せばよい。】
   (a) 1 質点系で
   $$L=L(\dot{\boldsymbol{x}},t) \tag{3.3.2}$$
   と書ける場合。【ヒント：これは L が $\boldsymbol{x}$ に依存しないということである。】
   (b) N 質点系で
   $$L=L(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m,\dot{\boldsymbol{x}}_n,t) \tag{3.3.3}$$
   のように、L の $\boldsymbol{x}_n$ 依存性が任意の 2 つの質点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_n$ と $\boldsymbol{x}_m$ の差である $\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m$ を通じてのみ入っている場合。【ヒント：これはやや省略した書き方になっていることに注意しよう。】
   (c) 1 質点系で
   $$L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2-mgx_3 \tag{3.3.4}$$
   のように表される場合。（これは 3 軸方向負の向きに働く一様重力場中の質点

[*2] $G(\boldsymbol{x}_n,t;\boldsymbol{a})$ に書いてある"; $\boldsymbol{a}$" の部分は余り悩む必要はなく、G は一般に定数ベクトル $\boldsymbol{a}$ に依存するということである。実際に t で常微分する際には $G(\boldsymbol{x}_n,t)$ と考えて $\boldsymbol{a}$ は定数ベクトルとして扱って良い。

に対応する。）【ヒント：この場合は明らかに

$$L(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a},\dot{\boldsymbol{x}})-L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\neq 0 \tag{3.3.5}$$

である。従って、(3.3.1) を満たす $G(\boldsymbol{x},t)$ が存在するか吟味し、存在する場合には $G(\boldsymbol{x},t)$ を求める必要がある。】

2. 次の３次元調和振動子系の空間並進対称性について調べよ。

$$L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2-\frac{1}{2}(k_1x_1^2+k_2x_2^2+k_3x_3^2). \tag{3.3.6}$$

（a）$k_1=0,\ k_2\neq 0,\ k_3\neq 0$ の場合。

（b）$k_1=k_2=0,\ k_3\neq 0$ の場合。

第 4 章

対称性をもつ Lagrangian (2)

4.1　空間回転対称性

3 軸周りの ϕ 回転は

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{4.1.1}$$

と与えられる。この回転行列を $R_3(\phi)$ とおく。これは直交行列である。[*1]

一般の空間回転は、3 軸周りの回転 R_3 と 1 軸周りの回転 R_1 を用いて、

$$R(\phi,\theta,\psi) = R_3(\phi)R_1(\theta)R_3(\psi) \tag{4.1.3}$$

と書ける。この (ϕ,θ,ψ) を Euler 角という。

空間回転 R により n 番目の粒子について、

$$\boldsymbol{x}_n \to R\boldsymbol{x}_n, \tag{4.1.4}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_n \to R\dot{\boldsymbol{x}}_n, \tag{4.1.5}$$

と変換される。

空間回転対称性

$\{\boldsymbol{x}_n(t)\}_{n=1,2,\cdots,N}$ が E-L 方程式の解であるときに、任意の回転行列 R に対して $\{R\boldsymbol{x}_n(t)\}_{n=1,2,\cdots,N}$ も解であれば、系は空間回転対称性があるという。

---

*1 R が直交行列であるとは、R が

$$R^T R = RR^T = 1 \tag{4.1.2}$$

を満たすときにいう。ただし、R^T は R の転置行列である。

ここで、どの質点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_n$ に対しても同じ R という回転行列を作用させて $R\boldsymbol{x}_n$ としていることに注意しよう。

このとき次の定理が成り立つことが直ちにわかる。

空間回転対称性をもつ Lagrangian

任意の回転行列 R に対して、Lagrangian $L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t)$ が

$$L(R\boldsymbol{x}_n, R\dot{\boldsymbol{x}}_n, t) = L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t) + \frac{d}{dt}G(\boldsymbol{x}_n, t; R) \tag{4.1.6}$$

を満たすような関数 $G(\boldsymbol{x}_n, t; R)$ をもつとき、系は空間回転対称性をもつ。

２つの質点の位置ベクトルや速度ベクトルの内積は空間回転不変である。従って、

$$L = L(\boldsymbol{x}_n \cdot \boldsymbol{x}_m, \dot{\boldsymbol{x}}_n \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_m, \boldsymbol{x}_n \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_m, t) \tag{4.1.7}$$

となる場合には、系は空間回転対称性をもつ。

4.1.1 演習問題

1. 次の１質点系の空間回転対称性を調べよ。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - U(r) \tag{4.1.8}$$

ただし、$r = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ とする。

2. 次の３次元調和振動子系の空間回転対称性について調べよ。

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - \frac{1}{2}(k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_3x_3^2). \tag{4.1.9}$$

（a）$k_1 = k_2 = k_3$ の場合

（b）$k_1 = k_2 \neq k_3$ の場合。

（c）k_1, k_2, k_3 が全て異なる場合。

4.2 Galilei 変換対称性

Galilei 変換

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{V}t \\ t' = t \end{cases} \tag{4.2.1}$$

に対応して、質点の位置ベクトルと速度ベクトルも

$$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}'_n = \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{V}t, \tag{4.2.2}$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}_n \to \dot{\boldsymbol{x}}'_n = \dot{\boldsymbol{x}}_n - \boldsymbol{V} \tag{4.2.3}$$

と変換を受ける。

Galilei 変換対称性

$\{\boldsymbol{x}_n(t)\}_{n=1,2,\cdots,N}$ が E-L 方程式の解であるときに、任意の定数ベクトル $\boldsymbol{V}$ に対して $\{\boldsymbol{x}_n(t) - \boldsymbol{V}t\}_{n=1,2,\cdots,N}$ が解であれば、系は Galilei 変換対称性があるという。

ここで、どの質点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_n$ に対しても同じ $-\boldsymbol{V}t$ というベクトルを足して $\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{V}t$ としていることに注意しよう。

このとき次の定理が成り立つことが直ちにわかる。

Galilei 変換対称性をもつ Lagrangian

任意の定数 $\boldsymbol{V}$ に対して、Lagrangian $L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t)$ が

$$L(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{V}t, \dot{\boldsymbol{x}}_n - \boldsymbol{V}, t) = L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t) + \frac{d}{dt}G(\boldsymbol{x}_n, t; \boldsymbol{V}) \tag{4.2.4}$$

を満たすような関数 $G(\boldsymbol{x}_n, t; \boldsymbol{V})$ をもつとき、系は Galilei 変換対称性をもつ。

4.2.1 演習問題

1. 1質点系について以下の問に答えよ。
   (a) $L = L(\dot{\boldsymbol{x}}^2)$ ととれば、系には時間並進対称性・空間並進対称性・空間回転対称性の3つの対称性があることを示せ。
   (b) Galilei 変換対称性は、任意の定数ベクトル $\boldsymbol{V}$ に対して

   $$L((\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{V})^2) - L(\dot{\boldsymbol{x}}^2) = \frac{d}{dt}G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{V}) \tag{4.2.5}$$

   を満たす $G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{V})$ が存在することであることを示せ。
   (c) ここで $\boldsymbol{V}$ が微小であるとして、(4.2.5) の左辺を $\boldsymbol{V} = 0$ の周りで $\boldsymbol{V}$ の 1 次までで Taylor 展開せよ。
   (d) (4.2.5) の右辺が $\dot{\boldsymbol{x}}$ の 1 次までの項しか含まないことを確かめ、$L = L(\dot{\boldsymbol{x}}^2)$ に関する微分方程式を立て、それを解け。

(e) 前問で得られた $L(\dot{\boldsymbol{x}}^2)$ は、Galilei 変換対称性を微小とは限らない $\boldsymbol{V}$ に対して (4.2.5) を満たす $G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{V})$ が存在することを示し、これを求めよ。

2. 一様重力場中の 1 質点系の Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - mgx_3 \tag{4.2.6}$$

は、時間並進・空間並進・空間回転・Galilei 変換のうちどの対称性を持っているか。

3. 二質点系の Lagrangian が

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{x}}_2^2 - V(|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|) \tag{4.2.7}$$

で与えられるとき、系は時間並進・空間並進・空間回転・Galilei 変換のうちどの対称性を持っているか。

第 5 章

対称性と保存則

5.1 Noether の定理

無限小変換対称性に対応して保存量が存在する。これを一般的に示したのが Noether の定理である。

Noether の定理

いま、$L = L(q, \dot{q}, t)$ が微小変換

$$q'(t) = q(t) + F(q(t), \dot{q}(t))\epsilon, \tag{5.1.1}$$

$$\dot{q}'(t) = \dot{q}(t) + \frac{d}{dt}F(q(t), \dot{q}(t))\epsilon \tag{5.1.2}$$

に対して、

$$L(q'(t), \dot{q}'(t), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{d}{dt}[Y(q(t), \dot{q}(t), t)\epsilon] \tag{5.1.3}$$

を満たす関数 $Y(q, \dot{q}, t)$ をもつと仮定する。
このとき、系は

$$Q := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}F - Y \tag{5.1.4}$$

という時間によらない定数すなわち保存量をもつ。

Proof. 証明は比較的簡単で、(5.1.3) に対して E-L 方程式を使うと、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Y\epsilon) &= L(q'(t), \dot{q}'(t), t) - L(q(t), \dot{q}(t), t) \\ &= \frac{\partial L}{\partial q}F\epsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}F\epsilon = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)F\epsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}F\epsilon = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}F\epsilon\right)\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

であるから、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}F - Y\right) = 0 \tag{5.1.6}$$

が得られる。 □

上の Noether の定理の仮定について注意を要する。いま、$q(t)$ が E-L 方程式の解であるとき、これを微小変換した $q'(t) = q(t) + F(q(t), \dot{q}(t))\epsilon$ も解であるためには、

$$L(q', \dot{q}', t) - L(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt}G(q, t) \tag{5.1.7}$$

と書けていなければならない。この G は $\dot{q}$ に依存してはならない。従って、Noether の定理の仮定は E-L 方程式の不変性の仮定よりも弱いことが分かる。

5.2 エネルギー

既に見たように、Lagrangian が時間に陽に依存しないとき、微小時間並進変換

$$q(t) \to q'(t) = q(t+\epsilon) = q(t) + \dot{q}(t)\epsilon \tag{5.2.1}$$

に対する対称性がある。このとき、$L(q', \dot{q}') - L(q, \dot{q})$ は

$$L(q', \dot{q}') - L(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}\epsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}\epsilon = \frac{d}{dt}\left(L(q, \dot{q})\epsilon\right) \tag{5.2.2}$$

と q と $\dot{q}$ の関数の時間に関する全微分で書かれるから、Noether の定理にあてはめることができる。$Y = L$ となっているから、保存量は

エネルギー

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L \tag{5.2.3}$$

と書ける。これをエネルギーと呼ぶ。

5.2.1 演習問題

1. 次の場合にエネルギーを求めよ。

   (a) 次の1粒子系
   $$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - U(\boldsymbol{x}) \tag{5.2.4}$$

   (b) Lagrangian が以下のように与えられる場合
   $$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) \tag{5.2.5}$$
   ただし
   $$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} m_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j. \tag{5.2.6}$$

5.3 運動量

N 質点系 $\{\boldsymbol{x}\}_{n=1,\cdots,N}$ に対して、定数ベクトル $\boldsymbol{a}$ の向きの微小並進変換

$$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}'_n = \boldsymbol{x}_n + \epsilon\boldsymbol{a}, \tag{5.3.1}$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}_n \to \dot{\boldsymbol{x}}'_n = \dot{\boldsymbol{x}}_n \tag{5.3.2}$$

に対して、Lagrangian $L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t)$ が不変であったとしよう。これは Noether の定理で $Y = 0$ の場合にあたる。対応する保存量は

$$Q = \sum_n\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial x_{n,i}}a_i = \sum_n\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_n}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a} \tag{5.3.3}$$

となる。ここで（全）運動量

$$\boldsymbol{P} := \sum_n\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_n} \tag{5.3.4}$$

を定義した。任意の $\boldsymbol{a}$ について対称性が成り立つとすると、$\boldsymbol{P}$ が保存量になる。

5.4 角運動量

微小回転ベクトルを $\delta\boldsymbol{\varphi}$ とすると、原点を中心とする微小空間回転は

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{x} \tag{5.4.1}$$

で表される。ここで

$$(\delta\varphi \times \boldsymbol{x})_i = \epsilon_{ijk}\delta\varphi_j x_k \tag{5.4.2}$$

である。いま

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \epsilon\boldsymbol{a} \tag{5.4.3}$$

とおく。

$L = L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t)$ がこの変換に対して不変であるとすると、Noether の定理で $Y = 0$ の場合に相当して、

$$Q = M_j a_j = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{a} \tag{5.4.4}$$

が保存量となる。ここで、（全）角運動量

$$M_j := \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{n,i}} \epsilon_{ijk} x_{n,k} = \sum_n \epsilon_{ijk} p_{n,i} x_{n,k} = \left(\sum_n \boldsymbol{x}_n \times \boldsymbol{p}_n \right)_j , \tag{5.4.5}$$

すなわち

$$\boldsymbol{M} := \sum_n \boldsymbol{x}_n \times \boldsymbol{p}_n \tag{5.4.6}$$

を定義した。任意の $\boldsymbol{a}$ に対して対称性がある場合には、$\boldsymbol{M}$ そのものが保存量になる。

5.4.1 演習問題

1. (5.4.4) を導け。
2. $L = L(q_1, \cdots, q_{k-1}, q_{k+1}, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_k, \cdots, \dot{q}_N, t)$ と Lagrangian が q_k に依存しないとき、この q_k を循環座標という。このとき、
   (a) Noether の定理から一般化運動量

   $$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{5.4.7}$$

   が保存量になることを示せ。

   (b) 上の定理を E-L 方程式から直接証明せよ。
3. 平面上の中心力下の質点の Lagrangian は

   $$L = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{x}}^2 - U(|\boldsymbol{x}|) \tag{5.4.8}$$

   で与えられる。これを極座標 (r, θ) で書くと、θ が循環座標になることを示し、これに対応する保存量である一般化運動量 p_θ を求めよ。

第 6 章

拘束のある系

6.1　拘束条件

$\{q_i\}_{i=1,\cdots,N}$ は全て独立ではなく、

$$C_a(q_1,\cdots,q_N)=0;\quad a=1,\cdots,A \tag{6.1.1}$$

のように条件が加わる場合がある。

- 例１：滑車にかかる２質点

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}^2, \tag{6.1.2}$$
$$C=x+y-l \tag{6.1.3}$$

- 例２：球面振り子

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz, \tag{6.1.4}$$
$$C=x^2+y^2+(z-l)^2-l^2 \tag{6.1.5}$$

この場合、拘束条件を使って変数を N 個から $N-A$ 個の独立な変数に減らして Lagrangian を書き直せば良い。しかし、これ実行するのが難しい場合もある。

6.2　Lagrange の未定乗数法

拘束系の解析力学を扱う非常に便利な方法として Lagrange の未定乗数法が知られている。

Lagrange の未定乗数法

Lagrangian が $L = L(q, \dot{q}, t)$ で与えられていて、拘束条件が $C_a(q) = 0$ $(a = 1, \cdots, A)$ であるとき、この系の運動方程式は、

$$L_C(q, \lambda, \dot{q}) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{a=1}^{A} \lambda_a C_a(q) \tag{6.2.1}$$

の $(q_1, \cdots, q_N, \lambda_1, \cdots, \lambda_A)$ を独立変数とする E-L 方程式と等価である。

簡単のため、$N = 2$, $A = 1$ の場合を考える。一般の N や A の場合の証明は複雑であるが、本質的には $N = 2$, $A = 1$ の場合と同様である。

Proof. $L = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$, $C = C(x, y)$ とする。この場合、変分原理から

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x + \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \right] = 0 \tag{6.2.2}$$

であるが、δx と δy は独立ではなく、拘束条件 $C(x, y) = 0$ を変分して得られる式、

$$\frac{\partial C}{\partial x}\delta x + \frac{\partial C}{\partial y}\delta y = 0 \tag{6.2.3}$$

を満たす。この式から δy を消去すると、(6.2.2) の被積分関数は

$$\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\frac{\partial C}{\partial x}}{\frac{\partial C}{\partial y}} \right] \delta x \tag{6.2.4}$$

と書ける。これで独立変数 x の変分 δx だけになったので、$\delta S = 0$ から

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \lambda \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \tag{6.2.5}$$

が得られる。ただし、

$$\lambda = -\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial y}} \tag{6.2.6}$$

とおいた。この式は

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) + \lambda \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \tag{6.2.7}$$

と変形できる。(6.2.5), (6.2.7) は

$$L_C(x, y, \lambda, \dot{x}, \dot{y}, t) := L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) + \lambda C(x, y) \tag{6.2.8}$$

とおいて、(x, y, λ) を独立変数として L_C に関する E-L 方程式を立てたときの、x についての式、y についての式とそれぞれ等価である。また λ についての E-L 式からは $C(x, y) = 0$ が得られる。 □

6.2.1　演習問題

1. 滑車にかかる 2 質点の例

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2, \tag{6.2.9}$$
$$C = x + y - l \tag{6.2.10}$$

において、変数を消去する方法と Lagrange の未定乗数法の両方で同じ結果になることを確かめよ。

2. 斜面を滑りなく転がる太さのない車輪に関する Lagrangian と拘束条件は

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}^2 + Mgx\sin\beta, \tag{6.2.11}$$
$$C = x - a\theta \tag{6.2.12}$$

で与えられる。ただし、x は車輪の移動距離、θ は車輪の回転角、M は車輪の質量、a は車輪の半径、g は重力定数、β は斜面の斜角である。

(a) Lagrange の未定乗数法を用いて運動方程式を書け。未定乗数を λ とする。

(b) $t = 0$ で $x = 0$, $\dot{x} = 0$ であったとする。x, θ および λ を t の関数として求めよ。

(c) λ は物理的に何に対応するか考察せよ。

第 7 章

簡単な連成振動

7.1　調和振動子

質量 m の質点がばね定数 k のばねにつながっている。ばねの自然長（釣り合いの位置）からののびを x とすると、

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{7.1.1}$$

である。運動は振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ の単振動である。これを調和振動子という。

7.2　3 つのばねの連成振動

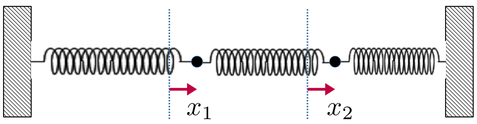

図 7.1　3 つのばねと 2 つの質点

図 7.1 のように、2 つの質点 1,2 の質量と同一直線上につながった 3 つのばね A,B,C がある。質点 1,2 は等しく m、3 つのばね A,B,C のばね定数も等しく k であるとする。A の左端と C の右端は壁に固定されているとする。x_1, x_2 を質点 1,2 の釣り合いの位置

からの変位とすると、ばねのポテンシャルエネルギーは

$$
\begin{aligned}
U(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \\
&= \frac{1}{2}k(2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2) \\
&= \frac{1}{2}(x_1, x_2)k\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{7.2.1}
$$

となる。すると Lagrangian は

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \left[\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\dot{x}_i M_{ij}\dot{x}_j - \frac{1}{2}x_i K_{ij} x_j = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T M\dot{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T K\boldsymbol{x}
\end{aligned} \tag{7.2.2}
$$

とかける。ただし、

$$
M = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = k\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{7.2.3}
$$

一般の連成振動では、行列 M と K は上の例とは異なる値をとるが、対称行列であると仮定して良い。

7.3 連成振動の解

このような系の解き方にはあるパターンがある。これは結果的に行列の対角化をおこなっていることに対応している。まず E-L 方程式を立てると、

$$
M_{ij}\ddot{x}_j + K_{ij}x_j = 0 \tag{7.3.1}
$$

が得られる。ここで

$$
x_j = e^{i\omega t}\alpha_j \tag{7.3.2}
$$

とおくと、

$$
(-\omega^2 M_{ij} + K_{ij})\alpha_j = 0 \tag{7.3.3}
$$

が得られる。これを満たす $\alpha_j \neq 0$ が存在するためには、

$$
\det(-\omega^2 M + K) = 0 \tag{7.3.4}
$$

が成り立たなければならない。これより

$$
\det\left[\begin{pmatrix} -\omega^2 m + 2k & -k \\ -k & -\omega^2 m + 2k \end{pmatrix}\right] = 0 \tag{7.3.5}
$$

これを解くと

$$\omega = \sqrt{3\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_+, \omega_- \tag{7.3.6}$$

となる。これを基準角振動数という。これは要するに行列 K の固有値を求めていることに他ならない。

次に基準振動モードを求める。α_j を (7.3.3) から求めると、基準振動 ω_+, ω_- に応じて、定数倍を除くと

$$\boldsymbol{\alpha}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.3.7}$$

となる。一般解はつぎのようになる。

$$\boldsymbol{x}(t) = C_+ e^{i\omega_+ t}\boldsymbol{\alpha}_+ + C_- e^{i\omega_- t}\boldsymbol{\alpha}_-. \tag{7.3.8}$$

ここで、$C_\pm$ は複素数の定数である。この結果を考察すると、質点の運動は 2 つの独立な基準振動からなり、基準振動の高振動数の方は 2 つの質点の振動が逆向きであり、低振動数の方は 2 つの質点の振動が同じ向きに揃っている。

7.3.1 演習問題

1. 7.2 節と同様であるが、今度は 2 つの質点 1,2 の質量はともに m であるが、ばね A,B,C のばね定数はそれぞれ k, $2k$, k であるとする。
   (a) ばねによるポテンシャルエネルギー $U(x_1, x_2)$ を求めよ。
   (b) Lagrangian を求めよ。
   (c) Lagrangian を行列を用いて書いた時、行列 M と行列 K を求めよ。
   (d) $x_j = e^{i\omega t}\alpha_j$ として、基準角振動数 ω を求めよ。
   (e) 基準振動モードを求めよ。
   (f) 一般解を求め、物理的に考察せよ。

第 8 章

Hamilton 形式 (1)

8.1 Hamiltonian

$L = L(q, \dot{q}, t)$ に対して、（一般化）運動量は

$$p = \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}, t) \tag{8.1.1}$$

で定義される。これを $\dot{q}$ について解いて、

$$\dot{q} = \dot{q}(q, p, t) \tag{8.1.2}$$

と表せたとする。このとき、

Hamiltonian

$$H(q, p, t) = p\dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \tag{8.1.3}$$

を Hamiltonian と定義する。また (q, p) を正準変数という。

8.2 Hamilton の運動方程式

$L(q, \dot{q}, t)$ の全微分をとって、E-L 方程式と p の定義式を使うと、

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}dt \\ &= \dot{p}dq + pd\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}dt. \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

すると Hamiltonian の全微分は

$$dH = d(p\dot{q} - L) = (\dot{q}dp + pd\dot{q}) - dL = (\dot{q}dp + pd\dot{q}) - \left(\dot{p}dq + pd\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}dt\right)$$
$$= \dot{q}dp - \dot{p}dq - \frac{\partial L}{\partial t}dt. \tag{8.2.2}$$

と書ける。従って、$H = H(q, p, t)$ の偏微分は、

Hamilton の運動方程式

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{8.2.3}$$

と求まる。これを Hamilton の運動方程式という。

ここで $L(q, \dot{q}, t)$ から $H(q, p, t) = p\dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)$ の変換によって、H の (q, p, t) のそれぞれの独立変数による偏微分が確定することは注目に値する。この変換により元の独立変数のうち $\dot{q}$ を p に入れ替えた独立変数の組に変更されたのである。これは Legendre 変換と呼ばれるより一般的な変換の例になっている。[*1]

また、(8.2.2) から

$$\frac{dH}{dt} = \dot{q}\dot{p} - \dot{p}\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{8.2.4}$$

である。従って、L が t に陽に依存しない場合、H は保存量である。これは (5.2.3) のエネルギー E に等しい。

8.2.1 演習問題

1. １質点系で

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - U(\boldsymbol{x}) \tag{8.2.5}$$

で与えられる時、

(a) E-L 方程式を書き下せ。

(b) $\boldsymbol{x}$ に共役な運動量 $\boldsymbol{p}$ を求めよ。

(c) Hamiltonian $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ を求めよ。

(d) Hamilton の運動方程式を書き下せ。

[*1] 熱力学において、内部エネルギー $U(S, V)$ からエンタルピー $H(S, p) = U + pV$、Helmholtz の自由エネルギー $F(T, V) = U - TS$、Gibbs の自由エネルギー $G(T, p) = U - TS + pV$ への変換が Legendre 変換の例として知られている。

（e）Hamilton の運動方程式が E-L 方程式と等価であることを確かめよ。

8.3　最小作用の原理

Hamilton の運動方程式は

$$S[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,[p\dot{q}(q,p,t) - H(q,p,t)] \tag{8.3.1}$$

の境界条件は $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ における $(q(t), p(t))$ についての停留条件からも導かれる。

Proof.

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\delta p\dot{q} + p\delta\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt}(p\delta q) + \delta p\dot{q} - \dot{p}\delta q - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\right] \\
&= [p\delta q]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-\left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\right)\delta q + \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p\right]
\end{aligned} \tag{8.3.2}$$

第一項は境界条件より消える。第二項が任意の δq, δp に対してゼロになるという条件から Hamilton の運動方程式が得られる。 □

第 9 章

Hamilton 形式 (2)

9.1　位相空間

(q, p) は $2N$ 次元空間の座標になる。この空間を位相空間 (phase space) という。系の時刻 t における状態 $(q(t), p(t))$ は位相空間上の 1 点になる。時間が経過するとともに、この点は $2N$ 次元位相空間上に曲線を描く。これを軌跡という。軌跡の接ベクトルは、Hamilton の運動方程式より、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} \tag{9.1.1}$$

で与えられる。接ベクトルが一意的に定義できるので、軌跡は互いに交わらない。

9.1.1　演習問題

1. 調和振動子の Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{9.1.2}$$

で与えられる。

(a) Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{9.1.3}$$

で与えられることを示せ。

(b) Hamilton の運動方程式を書き下せ。

（c）運動方程式の解を求めよ。

（d）解を位相空間上の軌跡として描け。

9.2 Poisson 括弧

ここでは $\{q_i\}_{i=1,\cdots,N}$、$\{p_i\}_{i=1,\cdots,N}$ の成分添字を明示する。ただし和の記号は Einstein の規約によって省略する。

Poisson 括弧

$f = f(q, p, t)$, $g = g(q, p, t)$ に対して、Poisson 括弧を

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \tag{9.2.1}$$

によって定義する。

[*1]

これによって、次の恒等式が成り立つ。

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{9.2.2}$$

$$\{q_i, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \tag{9.2.3}$$

$$\{p_i, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}, \tag{9.2.4}$$

$$\{q_i, p_j\} = -\{p_j, q_i\} = \delta_{ij}, \tag{9.2.5}$$

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0. \tag{9.2.6}$$

ただし δ_{ij} は Kronecker のデルタと呼ばれる記号で

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{9.2.7}$$

である。さらに、次の性質がある。f, g, h を q, p, t の関数とし、a, b を q, p によらない

[*1] Poisson 括弧は古典力学から量子力学に移るときに重要な役割を果たす。

量とすると、

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \tag{9.2.8}$$
$$\{f, a\} = 0, \tag{9.2.9}$$
$$\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}, \tag{9.2.10}$$
$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}, \tag{9.2.11}$$
$$\{af, bg\} = ab\{f, g\} \tag{9.2.12}$$

さらに次の Jacobi 恒等式が成り立つ。

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \tag{9.2.13}$$

証明は省略する。

Poisson 括弧の時間微分について、以下の恒等式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} + \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\} \tag{9.2.14}$$

証明は

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{9.2.15}$$

と Jacobi 不等式を用いれば良い。この恒等式により、f と g が保存量ならば、$\{f, g\}$ も保存量である。

9.2.1 演習問題

1. 1 質点系の位置 $\boldsymbol{x}$, 運動量 $\boldsymbol{p}$, 角運動量 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$ について以下の性質を証明せよ。
   (a) $\{x_i, M_j\} = \epsilon_{ijk} x_k$
   (b) $\{p_i, M_j\} = \epsilon_{ijk} p_k$
   (c) $\{M_i, M_j\} = \epsilon_{ijk} M_k$
2. 恒等式 (9.2.15) を証明せよ。

第 10 章

正準変換 (1)

10.1　正準変換

正準変数 (q, p) と Hamiltonian $H(q, p, t)$ の組があるとする。もちろん、Hamilton の運動方程式

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{10.1.1}$$

が成り立つ。この時、

$$(q, p) \to (Q(q, p, t), P(q, p, t)) \tag{10.1.2}$$

という変換に対して、ある新 Hamiltonian $K(Q, P, t)$ が存在して、これに対する Hamilton の運動方程式

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \tag{10.1.3}$$

が成り立つ時、この変換を正準変換という。ただし通常は、さらに Poisson 括弧を不変に保つという条件を満たす変換だけを正準変換という。

10.1.1　演習問題

1. つぎの変換が正準変換であることを示せ。

   (a) 恒等変換

   $$Q = q, \quad P = p, \quad K(Q, P, t) = H(q, p, t) \tag{10.1.4}$$

   (b) 定数倍変換 （a は 0 でない定数）

   $$Q = aq, \quad P = \frac{1}{a}p, \quad K(Q, P, t) = H\left(\frac{Q}{a}, aP, t\right) \tag{10.1.5}$$

（c）交換変換

$$Q = p, \quad P = -q, \quad , K(Q,P,t) = H(-P,Q,t) \tag{10.1.6}$$

10.2 母関数 $F(q,Q,t)$ による正準変換

母関数 $F(q,Q,t)$ による正準変換

変換 $(q,p) \to (Q,P)$ が正準変換になるためには、

$$p\dot{q} - H(q,p,t) = P\dot{Q} - K(Q,P,t) + \frac{d}{dt}F(q,Q,t) \tag{10.2.1}$$

となるような関数 $F(q,Q,t)$ が存在すればよい。このとき

$$p = \frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial Q}, \quad K = H + \frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial t} \tag{10.2.2}$$

と要請する。 $F(q,Q,t)$ をこの正準変換の母関数という。

Proof. まず、(10.2.1) を変形すると

$$\left(p - \frac{\partial F}{\partial q}\right)\dot{q} - \left(P + \frac{\partial F}{\partial Q}\right)\dot{Q} + K - \left(H + \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0 \tag{10.2.3}$$

である。従って、(10.2.2) を要請すれば任意の $\dot{q}$ と $\dot{Q}$ に対してこの式が成り立つことがわかる。そこで、

$$S[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} \left[p\dot{q} - H(q,p,t)\right], \tag{10.2.4}$$

$$S[Q,P] = \int_{t_1}^{t_2} \left[P\dot{Q} - K(Q,P,t)\right] \tag{10.2.5}$$

とおくと、(10.2.1) から

$$S[q,p] = S[Q,P] + \left[F(q,Q,t)\right]_{t_1}^{t_2} \tag{10.2.6}$$

である。左辺の変分は、$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ の境界条件の下で、Hamilton の運動方程式により 0 になる。右辺の変分は

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\dot{Q} - \frac{\partial K}{\partial P}\right)\delta P - \left(\dot{P} + \frac{\partial K}{\partial Q}\right)\delta Q\right] + \left[P\delta Q\right]_{t_1}^{t_2} + \left[\frac{\partial F}{\partial q}\delta q + \frac{\partial F}{\partial Q}\delta Q\right]_{t_1}^{t_2} \tag{10.2.7}$$

となる。ここで (10.2.2) の第 2 式を用いると、$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ の境界条件のもとで表面項が消えて (Q, P) に対する Hamilton の運動方程式が導かれる。 □

10.2.1　演習問題

1. 次の母関数をとったときの正準変換を求め、どのような変換であるか考察せよ。
   (a) $F = qQ$
   (b) 定数 θ に対して、

$$F = \frac{qQ - \cos\theta(q^2 + Q^2)}{2\sin\theta} \tag{10.2.8}$$

第 11 章

正準変換 (2)

11.1　正準変換を用いた解法

　調和振動子

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{11.1.1}$$

に対して、母関数

$$F(q, Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q \tag{11.1.2}$$

による正準変換をおこなう。[*1]

　すると

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \cot Q, \tag{11.1.4}$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{1}{2}m\omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}, \tag{11.1.5}$$

$$K(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P)) = \omega P \tag{11.1.6}$$

となる。ここで、K に Q 依存性が無いことに注意する。(Q, P) 系の Hamilton の運動方程式は

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \tag{11.1.7}$$

であるから、

$$Q = \omega t + \beta, \quad P = \alpha \tag{11.1.8}$$

[*1]

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \tag{11.1.3}$$

と解けてしまう。ここで β, α は積分定数である。また K は t を陽に含まないので、$K=E$ は保存量である。これより、$\alpha=E/\omega$ と書けることがわかる。

一般に新 Hamiltonian K を $K=K(P)$ のように Q を含まないように書ければ、Hamilton の運動方程式から、

$$\dot{P}=0 \tag{11.1.9}$$

であるから、$P=\alpha=$const と積分できて、

$$\dot{Q}=\frac{dK}{dP}(\alpha)=\text{const} \tag{11.1.10}$$

だから、この定数を ω とおけば

$$Q=\omega t+\beta \tag{11.1.11}$$

と積分できてしまう。ここで β は積分定数である。元の系の変数 (q,p) を求めるには、正準変換の式、

$$\begin{cases} p=\dfrac{\partial F}{\partial q}(q,\omega t+\beta,t), \\ \alpha=-\dfrac{\partial F}{\partial Q}(q,\omega t+\beta,t) \end{cases} \tag{11.1.12}$$

の第二式を q について解いて、

$$q=q(\omega t+\beta,\alpha,t) \tag{11.1.13}$$

とし、これを第一式に代入して、

$$p=\frac{\partial F}{\partial q}(q(\omega t+\beta,\alpha,t),\omega t+\beta,t) \tag{11.1.14}$$

と求まる。

11.1.1 演習問題

1. 11.1 節で調和振動子の問題を正準変換を用いて (Q,P) を t の関数として求めたが、これを用いて元の変数 (q,p) を t の関数として求めよ。

11.2 母関数 $\Phi(q,P,t)$, $\Psi(p,Q,t)$, $\Xi(p,P,t)$ による正準変換

母関数 $F(q,Q,t)$ による正準変換は恒等変換を含む点変換

$$Q=f(q,t) \tag{11.2.1}$$

を表すことができない。そこで $F(q,Q,t)$ の Q についての Legendre 変換

$$\Phi(q,P,t) = F(q,Q(q,P,t),t) + PQ(q,P,t) \tag{11.2.2}$$

を考えて、独立変数を (q,P,t) とする。

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q}dq + \frac{\partial F}{\partial Q}dQ + \frac{\partial F}{\partial t}dt = pdq - PdQ + \frac{\partial F}{\partial t}dt \tag{11.2.3}$$

だったから、

$$d\Phi = d(F+PQ) = pdq - PdQ + \frac{\partial F}{\partial t}dt + PdQ + QdP = pdq + QdP + \frac{\partial F}{\partial t}dt \tag{11.2.4}$$

という式が得られる。よって、$\Phi(q,P,t)$ を母関数とする正準変換は次の式で与えられる。

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial P}, \quad K = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{11.2.5}$$

となる。

$F(q,Q,t)$ の q についての Legendre 変換

$$\Psi(p,Q,t) = F(q,Q,t) - pq \tag{11.2.6}$$

を母関数とする正準変換は

$$d\Psi = dF - d(pq) = -PdQ - qdp + \frac{\partial F}{\partial t}dt \tag{11.2.7}$$

より、

$$q = -\frac{\partial \Psi}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial \Psi}{\partial Q}, \quad K = H + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{11.2.8}$$

によって与えられる。

また $F(q,Q,t)$ の q, Q 両方についての Legendre 変換

$$\Xi(p,P,t) = F(q,Q,t) - pq + PQ \tag{11.2.9}$$

を考えると、

$$d\Xi = dF - d(pq) + d(PQ) = -qdp + Qdp + \frac{\partial F}{\partial t}dt \tag{11.2.10}$$

だから、$\Xi(p,P,t)$ を母関数とする正準変換は

$$q = -\frac{\partial \Xi}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial \Xi}{\partial P}, \quad K = H + \frac{\partial \Xi}{\partial t} \tag{11.2.11}$$

で与えられる。

11.2.1　演習問題

1. $\Phi = qP$ を母関数とする正準変換が恒等変換を与えることを示せ。
2. $\Phi = f(q,t)P$ を母関数とする正準変換が点変換 $Q = f(q,t)$ を与えることを示せ。
3. (q,p) の回転変換は、
$$\Phi = \frac{2qP + \sin\theta(q^2 + P^2)}{2\cos\theta} \tag{11.2.12}$$
を母関数とする正準変換であることを示せ。
4. $\Psi = -pQ$ を母関数とする正準変換が恒等変換を与えることを示せ。
5. $\Psi = -pf^{-1}(Q,t)$ を母関数とする正準変換が点変換 $Q = f(q,t)$ を与えることを示せ。

第 12 章

正準変換 (3)

12.1　微小正準変換

恒等変換からわずかにずれた正準変換 $(q,p) \to (Q,P)$

$$Q = q + \delta q(q,p,t), \tag{12.1.1}$$

$$P = p + \delta p(q,p,t) \tag{12.1.2}$$

を考えるため、恒等変換を生成できる母関数 $\Phi(q,P,t)$ を用いる。このとき

$$p = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial P}, \quad K = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{12.1.3}$$

である。恒等変換は $\Phi = qP$ によって得られるから、そこからわずかにずれた母関数

$$\Phi = qP + \epsilon G(q,P,t) \tag{12.1.4}$$

を考える。ただし ϵ は任意の微小な定数。するとただちに

$$\delta q = \epsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial P}, \quad \delta p = -\epsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial q} \tag{12.1.5}$$

が成り立つが、いま (q,p) と (Q,P) は ϵ の１次のずれしかもっていないから、$O(\epsilon^2)$ を無視すると、

無限小正準変換

$$\delta q = \epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p}, \quad \delta p = -\epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial q} \tag{12.1.6}$$

と書くことが可能である。そこで $G(q,p,t)$ を無限小正準変換の母関数という。

そこで (q,p,t) の任意関数 $f=f(q,p,t)$ の変換を考えると、

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial q}\delta q + \frac{\partial f}{\partial p}\delta p = \epsilon\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q}\right) = \epsilon\{f,G\} \tag{12.1.7}$$

と Poisson 括弧で書ける。

12.2 微小正準変換と保存量

$G(q,p,t)=H(q,p,t)$ (H は Hamiltonian) ととってみると、$f(q,p)$ に対して、

$$\delta f = \epsilon\{f,H\} = \epsilon\frac{df}{dt} \tag{12.2.1}$$

であることがわかる。この変換は微小時間並進である。

N 質点系で

$$G(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{p}_n) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P} \tag{12.2.2}$$

とする。ここで $\boldsymbol{a}$ は任意の定数ベクトルであり、

$$\boldsymbol{P} = \sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{p}_n \tag{12.2.3}$$

は運動量である。すると、この正準変換によって質点の位置が

$$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}'_n = \boldsymbol{x}_n + \epsilon\delta\boldsymbol{x}_n \tag{12.2.4}$$

と変換されるとすると、

$$\delta\boldsymbol{x}_n = \{\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P}\} = \boldsymbol{a} \tag{12.2.5}$$

である。つまり、これは微小空間並進である。

次に N 質点系で

$$G(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{p}_n) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{M} \tag{12.2.6}$$

とする。ここで $\boldsymbol{a}$ は任意の定数ベクトルであり、

$$\boldsymbol{M} = \sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}_n\times\boldsymbol{p}_n \tag{12.2.7}$$

は角運動量である。このとき、

$$\delta\boldsymbol{x}_n = \{\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{M}\} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}_n \tag{12.2.8}$$

であるから、微小空間回転である。

このように保存量はそれに対応する微小正準変換を生成する。これは一般化されて以下の定理に集約される。

対称性と保存量

Noether の定理から得られる保存量を母関数とする微小正準変換は、Lagrangian の対称性である元の微小変換を引き起こす。

Proof. Lagrangian $L(q, \dot{q}, t)$ が微小変換

$$q \to q' = q + F(q, \dot{q})\epsilon \tag{12.2.9}$$

$$\dot{q} \to \dot{q}' = \dot{q} + \frac{d}{dt}F(q, \dot{q})\epsilon \tag{12.2.10}$$

に対して

$$L(q', \dot{q}', t) - L(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt}Y(q, \dot{q}, t)\epsilon \tag{12.2.11}$$

を満たすときに、

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}F - Y = pF - Y \tag{12.2.12}$$

という保存量が存在するというのが Noether の定理の内容である。

このとき

$$\begin{aligned} \{q, Q\} &= \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}[pF(q, \dot{q}(q,p)) - Y(q, \dot{q}(q,p)))] \\ &= F + \left(p\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial Y}{\partial \dot{q}}\right)\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} \end{aligned} \tag{12.2.13}$$

である。ここで、(12.2.11) より

$$\frac{\partial L}{\partial q}F + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\ddot{q}\right) = \frac{\partial Y}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial Y}{\partial \dot{q}}\ddot{q} \tag{12.2.14}$$

であり、この式が任意の $q, \dot{q}, \ddot{q}$ に関する恒等式として成り立つためには、

$$p\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial Y}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{12.2.15}$$

でなければならない。このことから (12.2.13) より

$$\{q, Q\} = F \tag{12.2.16}$$

が言えた。 □

12.2.1 演習問題

1. (12.2.1) を確かめよ。
2. (12.2.5) を確かめよ。
3. (12.2.8) を確かめよ。

12.3 正準変換の性質

正準変換の合成変換も正準変換である。正準変換の全体は群をなす。これは次のようなことを意味する。任意の正準変換 T, T_1, T_2, T_3 に対して、

- T_1T_2 も正準変換である。
- $(T_3T_2)T_1 = T_3(T_2T_1)$ が成り立つ。
- 恒等変換 1 も正準変換であり、$1 \cdot T = T \cdot 1 = T$ を満たす。
- T に対して逆正準変換 T^{-1} が存在し、$T^{-1}T = TT^{-1} = 1$ を満たす。

有限の時間並進は無限小時間並進を無限に合成することで構成できるから、有限時間並進も正準変換である。

正準変換では位相空間内の体積要素は不変に保たれる。これは Liouville の定理である。

Liouville の定理

正準変換でつながった 2 つの正準変数 (q, p), (Q, P) に対して、位相空間の体積要素について

$$d^N q d^N p = d^N Q d^N P \tag{12.3.1}$$

が成り立つ。特に時間発展に対して、位相空間の体積要素は不変である。

証明は省略する。

第 13 章

Hamilton-Jacobi 理論 (1)

13.1　Hamilton-Jacobi 方程式

うまい正準変換を見つけると運動方程式が簡単に解ける。その最たるものは $K(Q,P,t)=0$ にすることである。このとき、Hamilton の運動方程式から、

$$\dot{Q}=0,\quad \dot{P}=0 \tag{13.1.1}$$

となるから、直ちに

$$Q=\beta,\quad P=\alpha \tag{13.1.2}$$

と積分できる。ただし、β, α は積分定数。

母関数 $\Phi(q,P,t)$ による正準変換によって $K(Q,P,t)=0$ を達成しよう。これは

$$p=\frac{\partial\Phi(q,P,t)}{\partial q},\quad Q=\frac{\partial\Phi(q,P,t)}{\partial P},\quad K(Q,P,t)=H(q,p,t)+\frac{\partial\Phi(q,P,t)}{\partial t} \tag{13.1.3}$$

において $K=0$ とすればよい。このときの Φ を $S(q,P,t)$ と書いて、Hamilton の主関数という。すなわち、

$$p=\frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q},\quad Q=\frac{\partial S(q,P,t)}{\partial P},\quad H(q,p,t)+\frac{\partial S(q,P,t)}{\partial t}=0 \tag{13.1.4}$$

である。すでに見たように $Q=\beta$, $P=\alpha$ が解になる。そこで、

Hamilton-Jacobi 方程式

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q}(q,\alpha,t),t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}(q,\alpha,t)=0 \tag{13.1.5}$$

と書いて、これを Hamilton-Jacobi (H-J) 方程式という。 [*1]

H-J 方程式は $S(q,\alpha,t)$ に対する $(N+1)$ 変数 (q,t) の1階微分の方程式であるので、完全解[*2]は $(N+1)$ 個の任意定数をもつ。そのうち一つはいつでも S に足すことのできる物理的でない任意定数であり、残りの N 個は α である。

(q,p) を t の関数として得るには、(13.1.3) より、

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,\alpha,t), \quad \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}(q,\alpha,t) \tag{13.1.6}$$

の第二式を q について解いて

$$q = q(\beta,\alpha,t) \tag{13.1.7}$$

を求め、第一式に代入して

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(q(\beta,\alpha,t),\alpha,t) \tag{13.1.8}$$

とすれば良い。定数 (β,α) は初期条件 $(q(t_0),p(t_0)) = (q_0,p_0)$ から決定される。

H-J 方程式の解として $q(t)$ が得られたとすると、$S = S(q,\alpha,t)$ について、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial S}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial S}{\partial t} = p\dot{q} - H(q,p,t) = L(q,\dot{q},t) \tag{13.1.9}$$

が成り立つから、

$$S(q(t),\alpha,t) = \int^t d\tilde{t} L(q(\tilde{t}),\dot{q}(\tilde{t}),\tilde{t}) \tag{13.1.10}$$

が得られる。これは作用 $S(t)$ の値に等しい。

13.2 H が t に陽に依存しない場合

H-J 方程式においては $S(q,\alpha,t)$ の α は定数のパラメータに過ぎないので、一旦省略する。

$$S(q,t) = W(q) + Y(t) \tag{13.2.1}$$

という変数分離形を仮定すると、H-J 方程式の左辺第一項は q のみに依存し、第二項は t のみに依存するので、これらは定数でなければならない。この定数を α_1 と書いておくと、

$$\begin{cases} H\left(q, \dfrac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1, \\ \dfrac{dY}{dt} = -\alpha_1 \end{cases} \tag{13.2.2}$$

[*1] Hamilton の主関数は古典力学から量子力学に移る際に重要な役割を果たす。

[*2] 1 階の偏微分方程式において独立変数の個数分の任意定数を持つ解のことを完全解という。

となる。第二式は直ちに積分できて

$$Y = -\alpha_1 t + Y_0 \tag{13.2.3}$$

となるが、Y_0 の方は W に吸収させる。第一式は N 変数による一階微分の偏微分方程式なので、完全解は N 個の任意定数を含む。そのうちひとつは W に定数を足すだけなので、第一式の完全解は

$$W = W(q, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N) = W(q, \alpha) \tag{13.2.4}$$

と書ける。これより、S は

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_1 t \tag{13.2.5}$$

と表せる。W を Hamilton の特性関数という。(13.1.6) の第二式から

$$\beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}(q, \alpha) - t, \quad \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}(q, \alpha) \;\; (i = 1, \cdots, N) \tag{13.2.6}$$

のよって定まる。これらを q について解けば

$$q = q(\tilde{\beta}, \alpha, t + \beta_1) \tag{13.2.7}$$

が得られる。ただし、$\tilde{\beta} = (\beta_2, \cdots, \beta_N)$ と置いた。p は (13.1.6) の第一式から

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}(q(\tilde{\beta}, \alpha, t + \beta_1), \alpha) \tag{13.2.8}$$

と得られる。

13.2.1 演習問題

1. (13.2.2) の変数分離定数 α_1 は物理的にはどのような意味があるだろうか？考察せよ。
2. １次元自由粒子の Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2m} p^2 \tag{13.2.9}$$

で与えられる。この系の運動を 13.2 節の定式化に従って解け。

第 14 章

Hamilton-Jacobi 理論 (2)

14.1 H が t に陽に依存しない場合のもう一つの定式化

H が t に陽に依存しない場合を考える。これまで H-J 理論では $\Phi(q,P,t)=S(q,P,t)$ として $K=0$ となる正準変換を見つける方針だったが、今度は $\Phi(q,P,t)=W(q,P)$ として正準変換をおこなってみると、

$$Q=\frac{\partial W}{\partial P}(q,P),\quad p=\frac{\partial W}{\partial q}(q,P),\quad K=H \tag{14.1.1}$$

であるが、W は特性関数なので

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=\alpha_1 \tag{14.1.2}$$

を満たす。そこで $P_1=\alpha_1$ と選ぶと、$K=P_1$ であるから、Hamilton の運動方程式は

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial K}{\partial P_i}=\delta_{i1},\quad \dot{P}_i=-\frac{\partial K}{\partial Q_i}=0 \tag{14.1.3}$$

は

$$Q_i=\delta_{i1}t+\beta_i,\quad P=\alpha_i \tag{14.1.4}$$

と解ける。W は (14.1.2) を解くことによって

$$W=W(q,\alpha_1,\tilde{\alpha}) \tag{14.1.5}$$

と決まる。ただし、$\tilde{\alpha}=(\alpha_2,\cdots,\alpha_N)$ であり、もう一つの任意定数は W に足すことのできる物理的でない任意の定数で、これは W に吸収させる。(14.1.1) の第一式を q について解き、それを第二式に代入することによって、次のように q と p が求まる。

$$q=q(\tilde{\beta},\alpha,t+\beta_1),\quad p=\frac{\partial W}{\partial q}(q(\tilde{\beta},\alpha,t+\beta_1),\alpha) \tag{14.1.6}$$

14.1.1 演習問題

1. １次元調和振動子の Hamiltonian は

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \tag{14.1.7}$$

で与えられる。この系の運動を 14.1 節の定式化に従って解け。

14.2 作用変数・角変数

H-J 理論では α の選び方に任意性がある。いま H が t に陽に依存しない場合を考える。周期運動の場合、α_1 のかわりに

$$J(\alpha_1) = \oint p dq = \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq \tag{14.2.1}$$

を使うことができる。そして $W = W(q, J, \tilde{\alpha})$ と書いて ($\tilde{\alpha} := (\alpha_2, \cdots, \alpha_N)$)、

$$w = \frac{\partial W(q, \alpha_1(J), \tilde{\alpha})}{\partial J} = \frac{d\alpha_1}{dJ} \frac{\partial W(q, \alpha_1, \tilde{\alpha})}{\partial \alpha_1} \tag{14.2.2}$$

を考える。J と w をそれぞれ作用変数、角変数とよぶ。14.1 節の議論から、$J = \mathrm{const}$、

$$w = \nu t + \beta_J, \quad \nu := \frac{d\alpha_1}{dJ} \tag{14.2.3}$$

となる。ここで ν も β_J も定数である。w の一周期での増分を Δw とすると、

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial J} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = \frac{\partial J}{\partial J} = 1 \tag{14.2.4}$$

となる。従って、ν は周期の逆数、つまり振動数である。

14.2.1 演習問題

1. １次元調和振動子について
   (a) エネルギーを E とすると、作用変数は $J = 2\pi E/\omega$ であることを示せ。
   (b) W を (q, J) の関数として求めよ。
   (c) w を (q, J) の関数として求めよ。
   (d) ν を求めよ。

参考文献

[1] 畑浩之, 『解析力学』, (東京図書, 2014)