2026 年度春学期「解析力学」講義ノート（暫定版）

原田知広*1

2026 年 3 月 31 日

*1 立教大学理学部物理学科: harada@rikkyo.ac.jp

概要

これは 2026 年度の「解析力学」の講義ノートです。講義ノートでは解析力学のミニマムしか扱いませんので、解析力学に関する網羅的な知識を得ることを目指しません。基本的な考え方をしっかり身につけることを目標にしています。そのため非常に基礎的な問題を付けています。教科書 [1] と併用して学習を進めて下さい。

これは暫定版ですので誤りがあるかもしれません。また皆さんの質問等に対してコメントも入れていきます。随時更新してこちらに置いておきます。立教アカウントでのログインが必要です。

https://www2.rikkyo.ac.jp/~harada/teaching.html

目次

第 1 章

Lagrangian と最小作用の原理 (1)

1.1 Newton の運動方程式

慣性系において、粒子の質量を m、位置を $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ とすると[*1]、Newton の運動方程式

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F} \tag{1.1.1}$$

が成り立ちます。ここで

$$\ddot{\boldsymbol{x}} := \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} \tag{1.1.2}$$

は加速度です。ドットは t 微分を表しますので、ドットが 2 つついているのは t による 2 階微分です。

ここで $\boldsymbol{F}$ が保存力であるとき、ある関数 $U(\boldsymbol{x})$ の勾配を用いて、

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\ U = -\nabla U \tag{1.1.3}$$

と書くことができます。ここで $U = U(\boldsymbol{x})$ はポテンシャルと呼ばれます。このとき、

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 \tag{1.1.4}$$

を運動エネルギーといい、[*2]

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 + U(\boldsymbol{x}) = T + U \tag{1.1.5}$$

[*1] ここではベクトルは太字で表します。ベクトル $\boldsymbol{x}$ と座標 x は全く異なるものを表すので、ベクトルを書く際には絶対に太字にする必要があります。

[*2] 運動エネルギーを表すのに T という文字の他にも K という文字も使われたりしますが、本来はどんな文字でもいいはずです。どの文字が使われているかにあまり惑わされないようにしましょう。

をエネルギーといいます。エネルギーは保存します。なぜなら

$$\because \quad \frac{dE}{dt} = m\ddot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} + \nabla U \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = (m\ddot{\boldsymbol{x}} + \nabla U) \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = 0 \tag{1.1.6}$$

だからです。

ここで多変数関数の数学について復習します。2変数関数 $f(x, y)$ の場合、$x = a + \Delta x$、$y = b + \Delta y$ として、Δx, Δy は十分小さいとします。このとき、f を x についてだけ Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} f(a+\Delta x, b+\Delta y) = f(a, b+\Delta y) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b+\Delta y)\Delta x \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b+\Delta y)(\Delta x)^2 + O((\Delta x)^3) \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

となります。[*3] さらに y についても Taylor 展開すると、

多変数関数の Taylor 展開

$$\begin{aligned} f(a+\Delta x, b+\Delta y) &= \left[f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(\Delta y)^2 \right] \\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\Delta y \right] \Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \\ &\quad + O((\Delta x)^3, (\Delta x)^2(\Delta y), (\Delta x)(\Delta y)^2, (\Delta y)^3) \\ &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\Delta y^2 \\ &\quad + O((\Delta x)^3, (\Delta x)^2(\Delta y), (\Delta x)(\Delta y)^2, (\Delta y)^3) \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

となります。f が N 変数関数であるときも同様です。

[*3] ここで

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b+\Delta y) \tag{1.1.8}$$

という記号は、「$f(x, y)$ を x で偏微分した後、x に a を y に $b + \Delta y$ を代入したもの」を表します。数学では、これは「f という2変数関数を2変数のうちの第1変数で偏微分して、得られた2変数関数の2つのスロットに a と $b + \Delta y$ を代入した」という意味で、

$$f_1(a, b+\Delta y) \tag{1.1.9}$$

と書くこともあり、この方が x という余計な変数が現れないのでわかりやすい面もありますが、物理学では相対的に使用頻度が低いようです。

式 (1.1.10) で $\Delta f = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)$ とし、変位 Δx, Δy を無限小変位 dx, dy とし、対応する Δf を df とすると、

関数の全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{1.1.11}$$

が得られます。これを f の全微分といいます。

t をパラメータとする $(x,y) = (x(t), y(t))$ という曲線に沿った f の t 微分は、

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{1.1.12}$$

で得られます。[*4] f の勾配

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{1.1.13}$$

を用いると、

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \nabla f \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \tag{1.1.14}$$

が得られます。f が N 変数関数、つまり $f = f(x_1, \cdots, x_N)$ であるときも同様に

関数の曲線に沿った微分

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \nabla f \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \tag{1.1.15}$$

と書けます。ここで

Einstein の規約

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \tag{1.1.16}$$

のように和の記号を省略します。

[*4] ここで常微分 $\frac{df}{dt}$ と偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ は全く違う意味であることに注意しましょう。$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ は単純な偏微分ですが、常微分 $\frac{df}{dt}$ は曲線 $(x(t), y(t))$ に沿った微分です。一般に多変数関数 f の常微分 $\frac{d}{dt}$ は曲線に沿った微分であると考えておきましょう。

1.2 最小作用の原理

いま N 自由度の系 $\{q_1(t), \cdots, q_N(t)\} = \{q_i\}_{i=1,\cdots,N}$ を考えましょう。[*5] そして、$\{q_i\}$ と $\{\dot{q}_i\}$ と t の関数、$L = L(q_1, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_N, t)$ を考え、これを Lagrangian という名前をつけておきます。これは $N + N + 1 = 2N + 1$ 変数関数です。今後煩雑さを避けるため、単に q, $\dot{q}$, $L = L(q, \dot{q}, t)$ などと書いていくことがあります。q_i を一般化座標といい、

$$p_i := \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.2.1}$$

を q_i に共役な一般化運動量といいます。[*6] この関数の形に応じて力学が決まります。

今一旦 Newton 力学を忘れて、関数 $q(t)$ は以下の原理（公理）によって Lagrangian から決まると認めましょう。

最小作用の原理

$t = t_1$ と $t = t_2$ における q の値を

$$q(t_1) = q^{(1)}, \quad q(t_2) = q^{(2)} \tag{1.2.2}$$

と指定したとき、$t_1 < t < t_2$ における系の運動は、作用汎関数

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(q(t), \dot{q}(t), t) \tag{1.2.3}$$

が停留するように決まる。

ここで、汎関数というのは関数の関数のことです。作用汎関数は、単に作用とよばれることの方がより一般的です。停留するということについては次の章で詳しく説明します。

Newton 力学では $L = T - U$ で与えられます。

[*5] 一般化座標 q としては、初等力学では質点の位置ベクトルのデカルト座標 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ を使うことが多いのですが、物理系の一般化座標というのは系の状態を表す変数としていろいろなものが可能です。たとえば、1 質点系であっても位置を球座標で表した (r, θ, ϕ) や円筒座標で表した (ρ, z, ϕ) でもよいのです。2 質点 A, B の場合は 6 自由度あり、q として $(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = (x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B)$ をとることもできます。

[*6] 式 (1.2.1) における偏微分は関数 $L(q, \dot{q}, t)$ の独立変数である $(2N + 1)$ 変数のうち q_i 以外のすべての変数 $q_1, \cdots, q_{i-1}, q_{i+1}, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_N, t$ を定数であるかのように扱って q_i だけで微分をとるという意味です。$\dot{q}_i$ も q_i とは独立な変数として扱っていることに注意します。

1.2.1 演習問題

1. 質量 m の質点がポテンシャル $U(\boldsymbol{x})$ で表される保存力を受けているときの Lagrangian を求めよ。
2. 次の Lagrangian について、q に共役な一般化運動量を求めよ。

$$L(q,\dot{q},t)=\frac{1}{2}f(t)\dot{q}^2-\frac{1}{2}h(t)q^2 \tag{1.2.4}$$

第 2 章

Lagrangian と最小作用の原理 (2)

2.1 Euler-Lagrange 方程式

最小作用の原理をもう少し詳しく説明しましょう。いま $t_1 \leq t \leq t_2$ に t の関数 q が与えられているとします。この q は系のなんらかの時間変化を表す経路であると考えられます。つぎに、この関数 q を微小に変化させて同じ区間に $\tilde{q}$ という新しい関数を考えましょう。そこで $\delta q(t) := \tilde{q}(t) - q(t)$ とおけば $\tilde{q} = q + \delta q$ と書くことができます。ここで $\tilde{q}$ という経路が実際に物理的に起こることは想定されていないことに注意しましょう。このような仮想的な変化のことを変分といい、δ を使うのが慣例です。

ここで変化させる前の経路 q に対して作用 $S[q]$ が決まり、変化させたあとの経路 $\tilde{q} = q + \delta q$ に対しても作用 $S[q + \delta q]$ が決まります。その差を

$$\delta S[q] := S[q + \delta q] - S[q] \tag{2.1.1}$$

とおくと、δq が十分小さければ Taylor 展開によって $\delta S[q]$ は δq の一次から始まる冪展開で書けるでしょう。

ここで $S[q]$ が停留するとは、$\delta S[q]$ が δq の 1 次まででではどんな δq をとっても 0 になるということです。[*1]では (1.2.3) を使って具体的に計算してみましょう。$q(t) + \delta q(t)$ に対

[*1] 簡単な例として 2 変数関数 $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ を考えましょう。この関数の x, y に対する変分は

$$\delta f = f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y) = 2x\delta x - 4y\delta y + (\delta x)^2 - 2(\delta y)^2 \tag{2.1.2}$$

です。δf がいかなる δx、δy に対しても δx と δy の一次まででで 0 であるという停留条件をつけると、$x = y = 0$ が得られます。これは $f(x, y)$ の鞍点になっています。鞍点とは、ある方向で見れば極大点ですが別の方向から見れば極小点となるような点のことです。一般に停留条件を満たす点を停留点というが、これは極大点あるいは極小点あるいは鞍点などに対応します。作用汎関数 $S[q]$ は $t_1 < t < t_2$ を満たす連続無限個の t に対する $q(t)$ を引数とする関数とみなせますから、最小作用の原理は S の無限次元

する作用を考えます。ただし、$\tilde{q}(t_1) = q(t_1)$、$\tilde{q}(t_2) = q(t_2)$ ですから、

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{2.1.3}$$

です。L を Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} &L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) \\ &= L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}, t)\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t)\delta \dot{q} + \cdots . \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

ここで $\cdots$ は δq の 2 次以上の項です。以下、$(q, \dot{q}, t)$ は省略します。すると、δq の 1 次までで

$$\begin{aligned} \delta S[q] &= S[q + \delta q] - S[q] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)\delta q \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right]\delta q + \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)\delta q \right]_{t_1}^{t_2} . \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

ここで (2.1.3) より最後の項は 0 になります。従って、任意の δq に対して $\delta S[q]$ の 1 次が 0 になるための必要十分条件は、

Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{2.1.6}$$

です。これを Euler-Lagrange (E-L) 方程式といいます。

2.1.1 演習問題

1. 保存力が働く 1 質点系

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - U(\boldsymbol{x}) \tag{2.1.7}$$

に対して Euler-Lagrange 方程式を立てよ。[*2]

空間 $\{q(t)\}_{t_1<t<_2}$ での停留点が実現することを主張します。

[*2] この問題によって、Lagrangian (2.1.7) は最小作用の原理のもとで Newton の運動方程式 (1.1.1) と等価であることが示されます。

2. 糸の長さが ℓ の単振り子の Lagrangian $L = L(\theta, \dot{\theta})$ を求め、Euler-Lagrange 方程式を立て、$\ddot{\theta}$ を θ で表せ。[*3]

2.2 Lagrangian の不定性

Lagrangian には次のような不定性があります。

Lagrangian の不定性

> $L(q, \dot{q}, t)$ に対して関数 $G(q, t)$ を用いて、
>
> $$\tilde{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}G(q, t) \tag{2.2.1}$$
>
> としても、E-L 方程式は変わらない。

実際、

$$\begin{aligned}\tilde{S}[q] &:= \int_{t_1}^{t_2} dt \tilde{L}(q(t), \dot{q}(t), t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} G(q(t), t) \\ &= S[q] + [G(q(t), t)]_{t_1}^{t_2}\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

において、両辺の q による変分をとると、

$$\delta\tilde{S}[q] = \delta S[q] + \delta\left[G(q(t), t)\right]_{t_1}^{t_2} \tag{2.2.3}$$

となりますが、右辺の最後の項は $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ より、

$$\delta\left[G(q(t), t)\right]_{t_1}^{t_2} = \delta G(q(t_2), t_2) - \delta G(q(t_1), t_1) = 0. \tag{2.2.4}$$

よって、式 (2.2.2) の両辺の変分は

$$\delta\tilde{S}[q] = \delta S[q] \tag{2.2.5}$$

となります。これにより、$\tilde{L}$ でも L でも E-L 方程式は同じになります。ここで、Lagrangian の不定性を表す項における時間微分は常微分で書かれていることに注意しま

[*3] 厳密解は第 1 種楕円積分によって表されます。

しょう。これは曲線 $q=q(t)$ に沿った微分であるので $q=q(t)$ として $G(q(t),t)$ を t で微分する必要があります。従って、Lagrangian には

$$\frac{d}{dt}G(q,t)=\frac{\partial G}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial G}{\partial t} \tag{2.2.6}$$

という項を足す不定性があります。[*4]

2.2.1 演習問題

1. 次の Lagrangian
$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-U(x) \tag{2.2.7}$$
に対して、$G(x,t)=ax^2+bt^5+ctx$ と置くことによって、L と等価な Lagrangian
$$\tilde{L}=L+\frac{d}{dt}G(x,t) \tag{2.2.8}$$
を求めよ。
2. 2次元平面上で s をパラメータとする曲線 $(x,y)=(x(s),y(s))$ の $s=0$ から $s=1$ までの長さ S は
$$S=\int_0^1 ds\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \tag{2.2.9}$$
である。この曲線の両端を $(x(0),y(0))=(0,0)$, $(x(1),y(1))=(a,b)$ と固定したときに長さ S が最小となる曲線を求めよ。ただしドットは s による微分です。

[*4] この項を時間全微分項ということがあります。$G=G(q,t)$ であることに注意すると、この G の時間全微分で書けるという条件は非常に強い条件です。例えば、q に依存する式がこのように書けるためには、$\dot{q}$ に関する1次式でなければなりません。

第 3 章

対称性をもつ Lagrangian (1)

3.1 対称性と Lagrangian

Lagrangian が物理法則を支配します。従って、Lagrangian を決めることが物理法則を決めることになります。Lagrangian を決める方針として有効なのが対称性を尊重して決めることです。

3.2 時間並進対称性

時間並進対称性

$q(t)$ が E-L 方程式の解であるとき、任意の定数 a_0 に対して $q(t+a_0)$ も解であるならば、この系には時間並進対称性があるという。

次の定理が成り立ちます。

時間に陽には依存しない Lagrangian

Lagrangian が時間に陽には依存しないとき、系には時間並進対称性がある。

Proof. いま L が陽には t に依存しない、つまり $L(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q})$ であるとする。まず $q(t)$ が E-L 方程式

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t),\dot{q}(t))\right]-\frac{\partial L}{\partial q}(q(t),\dot{q}(t))=0 \tag{3.2.1}$$

の解であると仮定する。つぎに E-L 方程式の左辺に $q(t+a_0)$ を代入すると、

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t+a_0),\dot{q}(t+a_0))\right]-\frac{\partial L}{\partial q}(q(t+a_0),\dot{q}(t+a_0))\\&=\frac{d}{d\tilde{t}}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(\tilde{t}),\dot{q}(\tilde{t}))\right]-\frac{\partial L}{\partial q}(q(\tilde{t}),\dot{q}(\tilde{t}))=0\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

が言える。[*1]ただし、任意の定数 a_0 に対して、$\tilde{t}=t+a_0$ とおき $d\tilde{t}=dt$ であることを使った。最後の等号が成り立つのは、式 (3.2.1) の t をただ $\tilde{t}$ と書き直しただけの式だからである。つまり、$q(t+a_0)$ も E-L 方程式の解である。従って、系が時間並進対称性をもつことが言えた。 □

では Lagrangian が t に陽に依存する場合はどうなるでしょうか。まず $q(t)$ が E-L 方程式の解であると仮定します。すなわち、

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t),\dot{q}(t),t)\right]-\frac{\partial L}{\partial q}(q(t),\dot{q}(t),t)=0\tag{3.2.7}$$

であるとします。この場合、$q(t+a_0)$ を E-L 方程式の左辺に代入して、$\tilde{t}=t+a_0$ を使って書き直すと、

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t+a_0),\dot{q}(t+a_0),t)\right]-\frac{\partial L}{\partial q}(q(t+a_0),\dot{q}(t+a_0),t)\\&=\frac{d}{d\tilde{t}}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(\tilde{t}),\dot{q}(\tilde{t}),\tilde{t}-a_0)\right]-\frac{\partial L}{\partial q}(q(\tilde{t}),\dot{q}(\tilde{t}),\tilde{t}-a_0)\end{aligned}\tag{3.2.8}$$

[*1] 既述ですが確認します。1 自由度系に限定すれば、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t+a_0),\dot{q}(t+a_0))\tag{3.2.3}$$

という記号は、「$L(q,\dot{q})$ を $\dot{q}$ で偏微分した後、q と $\dot{q}$ にそれぞれ $q(t+a_0)$ と $\dot{q}(t+a_0)$ を代入したもの」という意味です。つまり、

$$L_2(q(t+a_0),\dot{q}(t+a_0))\tag{3.2.4}$$

と同じ意味です。$\dot{q}(t+a_0)$ を $\dot{q}(t)$ で偏微分したらどうなるかなどといったことで思い悩む必要はありません。N 自由度系の場合には、添字が省略されています。添字を復活させると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q_1(t+a_0),\cdots,q_N(t+a_0),\dot{q}_1(t+a_0),\cdots,\dot{q}_N(t+a_0)),\tag{3.2.5}$$

または

$$L_{N+i}(q_1(t+a_0),\cdots,q_N(t+a_0),\dot{q}_1(t+a_0),\cdots,\dot{q}_N(t+a_0))\tag{3.2.6}$$

などとなります。

となります。ここで Lagrangian が t に陽に依存する場合には、(3.2.7) が満たされていても (3.2.8) がゼロになる保証はありません。従って、$q(t+a_0)$ は E-L 方程式を満たしません。すなわち、系には時間並進対称性はありません。

3.3 空間並進対称性

ここでは N 質点系を考え、一般化座標 q として $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1,2,\cdots,N}$ をとります。ここで $\boldsymbol{x}_n$ は n 番目の質点のデカルト座標での 3 次元位置ベクトルを表します。[*2] このときの Lagrangian は $L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t)$ と書けます。本当は N 個並べて書かなければならないのですが、第 n 番目で代表させます。

空間並進対称性

$\{\boldsymbol{x}_n(t)\}_{n=1,2,\cdots,N}$ が E-L 方程式の解であるときに、任意の定数ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\{\boldsymbol{x}_n(t)+\boldsymbol{a}\}_{n=1,2,\cdots,N}$ も解であれば、系は空間並進対称性があるという。

ここで、どの質点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_n$ に対しても同じ $\boldsymbol{a}$ という定数ベクトルを足して $\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{a}$ としていることに注意しましょう。

このとき次の定理が成り立つことが直ちにわかります。

空間並進対称性をもつ Lagrangian

任意の定数ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、Lagrangian $L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t)$ が

$$L(\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{a}, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t) = L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t) + \frac{d}{dt}G(\boldsymbol{x}_n, t; \boldsymbol{a}) \tag{3.3.1}$$

を満たすような関数 $G(\boldsymbol{x}_n, t; \boldsymbol{a})$ をもつとき、系は空間並進対称性をもつ。

[*2] これは便宜上のためです。本来は質点系である必要も一般化座標 q をデカルト座標にする必要もありません。しかしその場合は空間並進変換が q においてどのような変換にあたるのかを予め調べる必要があります。

*3*4

3.3.1 演習問題

1. つぎの場合に空間並進対称性が成り立つことを示せ。【ヒント：(3.3.1) を満たす $G(\boldsymbol{x},t)$ が存在することを示してください。】

　(a) 1質点系で

$$L = L(\dot{\boldsymbol{x}}, t) \tag{3.3.3}$$

　と書ける場合。【ヒント：これは L が $\boldsymbol{x}$ に依存しないということです。】

　(b) N 質点系で

$$L = L(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t) \tag{3.3.4}$$

　のように、L の $\boldsymbol{x}_n$ 依存性が任意の2つの質点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_n$ と $\boldsymbol{x}_m$ の差である $\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m$ を通じてのみ入っている場合。【ヒント：これはやや省略した書き方になっていることに注意しましょう。】

　(c) 1質点系で

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - mgx_3 \tag{3.3.5}$$

　のように表される場合。（これは3軸方向負の向きに働く一様重力場中の質点に対応する。）【ヒント：この場合は明らかに

$$L(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}, \dot{\boldsymbol{x}}) - L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) \neq 0 \tag{3.3.6}$$

　です。従って、(3.3.1) を満たす $G(\boldsymbol{x},t)$ が存在するか吟味し、存在する場合には $G(\boldsymbol{x},t)$ を求める必要があります。】

---

*3 (3.3.1) の $G(\boldsymbol{x}_n, t; \boldsymbol{a})$ に書いてある"$;\boldsymbol{a}$" の部分は余り悩む必要はなく、G は一般に定数ベクトル $\boldsymbol{a}$ に依存するということです。実際に t で常微分する際には $G(\boldsymbol{x}_n, t)$ と考えて $\boldsymbol{a}$ は定数ベクトルとして扱います。

*4 既出ですが、確認します。(3.3.1) の右辺の剰余項は、詳しく書くと

$$\frac{d}{dt}G(\boldsymbol{x}_n, t; \boldsymbol{a}) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_{n,i}\frac{\partial G}{\partial x_{n,i}}(\boldsymbol{x}_n, t; \boldsymbol{a}) + \frac{\partial G}{\partial t}(\boldsymbol{x}_n, t; \boldsymbol{a}) \tag{3.3.2}$$

という形です。これを $G(\boldsymbol{x}_n, t; \boldsymbol{a})$ の時間全微分項といいます。剰余項がこのような形になっているかどうかというのはかなり非自明です。剰余項が $\boldsymbol{x}_n$ や $\dot{\boldsymbol{x}}_n$ によらない場合には、剰余項を時間積分して $G(\boldsymbol{x}_n, t; \boldsymbol{a})$ が t だけの関数として容易に求まります。しかし、剰余項が $\boldsymbol{x}_n$ や $\dot{\boldsymbol{x}}_n$ に依存する場合には、落ち着いて考える必要があります。このような場合には剰余項は $\dot{\boldsymbol{x}}_n$ の1次式でなければならないことがわかります。さらに、剰余項が $\dot{\boldsymbol{x}}_n$ の1次式であったとしても、それが (3.3.2) のように書ける $G(\boldsymbol{x}_n, t; \boldsymbol{a})$ が存在するかどうかはその都度確かめてみなければわかりません。

2. 次の 3 次元調和振動子系の空間並進対称性について調べよ。

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - \frac{1}{2}(k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2). \tag{3.3.7}$$

【ヒント：(3.3.1) を満たす $G(\boldsymbol{x}, t)$ が存在するか吟味します。】

（a）$k_1 = 0,\ k_2 \neq 0,\ k_3 \neq 0$ の場合。

（b）$k_1 = k_2 = 0,\ k_3 \neq 0$ の場合。

第 4 章

対称性をもつ Lagrangian (2)

4.1 空間回転対称性

いま位置ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ を

$$x_1 = \rho \cos \alpha, \quad x_2 = \rho \sin \alpha \tag{4.1.1}$$

と書いておきます。α は $\boldsymbol{x}$ を $x_1 x_2$ 平面に射影したベクトルと 1 軸がなす角です。3 軸周りの角度 ϕ 回転によって $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}'$ に移るとすると、

$$x_1' = \rho \cos(\alpha + \phi), \quad x_2' = \rho \sin(\alpha + \phi), \quad x_3' = x_3 \tag{4.1.2}$$

となります。三角関数の加法定理を用いると、これは次のように書くことができます。

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{4.1.3}$$

この回転行列を $R_3(\phi)$ とおきます。これは直交行列です。[*1]

一般の空間回転は、3 軸周りの回転 R_3 と 1 軸周りの回転 R_1 を用いて、

$$R(\phi, \theta, \psi) = R_3(\phi) R_1(\theta) R_3(\psi) \tag{4.1.5}$$

と書けます。[*2] この (ϕ, θ, ψ) を Euler 角といいます。

[*1] R が直交行列であるとは、R が

$$R^T R = R R^T = 1 \tag{4.1.4}$$

を満たすときにいいます。ただし、R^T は R の転置行列です。

[*2] 空間回転とは空間中の一点だけを動かすのではなくて、空間中のすべての点を原点を通る座標軸の周りに回転するということに注意してください。

N 粒子系を考えると、空間回転 R により任意の粒子 n $(n = 1, \cdots, N)$ について、

$$\boldsymbol{x}_n \to R\boldsymbol{x}_n, \tag{4.1.6}$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}_n \to R\dot{\boldsymbol{x}}_n, \tag{4.1.7}$$

と変換されます。そこで、空間回転対称性を次のように定義します。

空間回転対称性

$\{\boldsymbol{x}_n(t)\}_{n=1,2,\cdots,N}$ が E-L 方程式の解であるときに、任意の回転行列 R に対して $\{R\boldsymbol{x}_n(t)\}_{n=1,2,\cdots,N}$ も解であれば、系は空間回転対称性があるという。

ここで、どの質点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_n$ に対しても同じ R という回転行列を作用させて $R\boldsymbol{x}_n$ としていることに注意しましょう。

このとき次の定理が成り立つことが直ちにわかります。

空間回転対称性をもつ Lagrangian

任意の回転行列 R に対して、Lagrangian $L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t)$ が

$$L(R\boldsymbol{x}_n, R\dot{\boldsymbol{x}}_n, t) = L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t) + \frac{d}{dt}G(\boldsymbol{x}_n, t; R) \tag{4.1.8}$$

を満たすような関数 $G(\boldsymbol{x}_n, t; R)$ をもつとき、系は空間回転対称性をもつ。

2つの質点の位置ベクトルや速度ベクトルの内積は空間回転不変です。従って、

$$L = L(\boldsymbol{x}_n \cdot \boldsymbol{x}_m, \dot{\boldsymbol{x}}_n \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_m, \boldsymbol{x}_n \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_m, t) \tag{4.1.9}$$

となる場合には、系は空間回転対称性をもちます。

4.1.1 演習問題

1. 次の1質点系の空間回転対称性を調べよ。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - U(r) \tag{4.1.10}$$

   ただし、$r = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ とする。【ヒント：(3.3.1) を満たす $G(\boldsymbol{x}, t)$ が存在するか吟味します。】

2. 次の3次元調和振動子系の空間回転対称性について調べよ。

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - \frac{1}{2}(k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_3x_3^2). \tag{4.1.11}$$

   【ヒント：(3.3.1) を満たす $G(\boldsymbol{x}, t)$ が存在するか吟味します。】

(a) $k_1 = k_2 = k_3$ の場合

(b) $k_1 = k_2 \neq k_3$ の場合。

4.2 Galilei 変換対称性

Galilei 変換

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{V}t \\ t' = t \end{cases} \tag{4.2.1}$$

に対応して、質点の位置ベクトルと速度ベクトルも

$$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}'_n = \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{V}t, \tag{4.2.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_n \to \dot{\boldsymbol{x}}'_n = \dot{\boldsymbol{x}}_n - \boldsymbol{V} \tag{4.2.3}$$

と変換を受ける。

Galilei 変換対称性

$\{\boldsymbol{x}_n(t)\}_{n=1,2,\cdots,N}$ が E-L 方程式の解であるときに、任意の定数ベクトル $\boldsymbol{V}$ に対して $\{\boldsymbol{x}_n(t) - \boldsymbol{V}t\}_{n=1,2,\cdots,N}$ が解であれば、系は Galilei 変換対称性があるという。

ここで、どの質点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_n$ に対しても同じ $-\boldsymbol{V}t$ というベクトルを足して $\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{V}t$ としていることに注意しましょう。

このとき次の定理が成り立つことが直ちにわかります。

Galilei 変換対称性をもつ Lagrangian

任意の定数 $\boldsymbol{V}$ に対して、Lagrangian $L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t)$ が

$$L(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{V}t, \dot{\boldsymbol{x}}_n - \boldsymbol{V}, t) = L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t) + \frac{d}{dt}G(\boldsymbol{x}_n, t; \boldsymbol{V}) \tag{4.2.4}$$

を満たすような関数 $G(\boldsymbol{x}_n, t; \boldsymbol{V})$ をもつとき、系は Galilei 変換対称性をもつ。

4.2.1 演習問題

1. 1質点系について以下の問に答えよ。

   (a) $L = L(\dot{\boldsymbol{x}}^2)$ ととれば、系には時間並進対称性・空間並進対称性・空間回転対称性の3つの対称性があることを示せ。【ヒント：$L = L(\dot{\boldsymbol{x}}^2)$ というのは、

Lagrangian $L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$ が $\boldsymbol{x}$ にも t にも依存せず、$\dot{\boldsymbol{x}}$ の依存性が $\dot{\boldsymbol{x}}^2$ の形を通してのみ入ることを仮定しているということです。】

（b）Galilei 変換対称性は、任意の定数ベクトル $\boldsymbol{V}$ に対して

$$L((\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{V})^2) - L(\dot{\boldsymbol{x}}^2) = \frac{d}{dt} G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{V}) \tag{4.2.5}$$

を満たす $G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{V})$ が存在することであることを示せ。

（c）ここで $\boldsymbol{V}$ が微小であるとして、(4.2.5) の左辺を $\boldsymbol{V} = 0$ の周りで $\boldsymbol{V}$ の 1 次までで Taylor 展開せよ。

（d）(4.2.5) の右辺が $\dot{\boldsymbol{x}}$ の 1 次までの項しか含まないことを確かめ、$L = L(\dot{\boldsymbol{x}}^2)$ に関する微分方程式を立て、それを解け。

（e）前問で得られた $L(\dot{\boldsymbol{x}}^2)$ は、Galilei 変換対称性を微小とは限らない $\boldsymbol{V}$ に対して (4.2.5) を満たす $G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{V})$ が存在することを示し、これを求めよ。

2. 二質点系の Lagrangian が

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{x}}_2^2 - V(|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|) \tag{4.2.6}$$

で与えられるとき、系は時間並進・空間並進・空間回転・Galilei 変換のうちどの対称性を持っているか。

第 5 章

対称性と保存則

5.1　Noether の定理

無限小変換対称性に対応して保存量が存在します。これを一般的に示したのが Noether の定理です。

Noether の定理

いま、$L = L(q, \dot{q}, t)$ が微小変換

$$q'(t) = q(t) + F(q(t), \dot{q}(t))\epsilon, \tag{5.1.1}$$

$$\dot{q}'(t) = \dot{q}(t) + \frac{d}{dt}F(q(t), \dot{q}(t))\epsilon \tag{5.1.2}$$

に対して、

$$L(q'(t), \dot{q}'(t), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{d}{dt}[Y(q(t), \dot{q}(t), t)\epsilon] \tag{5.1.3}$$

を満たす関数 $Y(q, \dot{q}, t)$ をもつと仮定する。
このとき、系は

$$Q := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}F - Y \tag{5.1.4}$$

という時間によらない定数すなわち保存量をもつ。

Proof. 証明は比較的簡単で、(5.1.3) に対して E-L 方程式を使うと、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Y\epsilon) &= L(q'(t),\dot{q}'(t),t) - L(q(t),\dot{q}(t),t) \\ &= \frac{\partial L}{\partial q}F\epsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}F\epsilon = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)F\epsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}F\epsilon = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}F\epsilon\right) \quad (5.1.5)\end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}F - Y\right) = 0 \tag{5.1.6}$$

が得られる。 □

上の Noether の定理の仮定と対称性の仮定について注意を要します。いま、$q(t)$ が E-L 方程式の解であるとき、これを微小変換した $q'(t) = q(t) + F(q(t),\dot{q}(t))\epsilon$ も解であるためには、

$$L(q',\dot{q}',t) - L(q,\dot{q},t) = \frac{d}{dt}G(q,t)\epsilon \tag{5.1.7}$$

と書けていなければなりません。この G は $\dot{q}$ に依存しません。従って、Noether の定理の仮定にある $Y(q,\dot{q},t)$ は対称性のある場合には $Y(q,\dot{q},t) = G(q,t)$ となっていて、Noether の定理の条件よりも強い条件が課されていることがわかります。[*1]

5.2 エネルギー

既に見たように、Lagrangian が時間に陽に依存しないとき、微小時間並進変換

$$q(t) \to q'(t) = q(t+\epsilon) = q(t) + \dot{q}(t)\epsilon \tag{5.2.1}$$

に対する対称性があります。このとき、$L(q',\dot{q}') - L(q,\dot{q})$ は

$$L(q',\dot{q}') - L(q,\dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}\epsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}\epsilon = \frac{d}{dt}\left[L(q,\dot{q})\epsilon\right] \tag{5.2.2}$$

と q と $\dot{q}$ の関数の時間に関する全微分で書かれるので、Noether の定理にあてはめることができます。$Y = L$ となっているので、保存量は

エネルギー

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L \tag{5.2.3}$$

と書けます。これをエネルギーと呼びます。

[*1] ただし、時間並進対称性は例外で、$Y(q,\dot{q},t)$ が実際に $\dot{q}$ にも依存する場合になります。

5.2.1 演習問題

1. 次の場合にエネルギーを求めよ。
   (a) 次の１粒子系
   $$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - U(\boldsymbol{x}) \tag{5.2.4}$$
   (b) Lagrangian が以下のように与えられる場合
   $$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) \tag{5.2.5}$$
   ただし
   $$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} m_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j. \tag{5.2.6}$$

5.3 運動量

N 質点系 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1,\cdots,N}$ において、定数ベクトル $\boldsymbol{a}$ の向きの微小空間並進変換

$$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}'_n = \boldsymbol{x}_n + \epsilon\boldsymbol{a}, \tag{5.3.1}$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}_n \to \dot{\boldsymbol{x}}'_n = \dot{\boldsymbol{x}}_n \tag{5.3.2}$$

に対して、Lagrangian $L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t)$ が不変であったとしましょう。これは Noether の定理で $Y = 0$ の場合にあたります。対応する保存量は

$$Q = \sum_n \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{n,i}} a_i = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_n} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a} \tag{5.3.3}$$

となります。ここで（全）運動量

$$\boldsymbol{P} := \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_n} = \sum_n \boldsymbol{p}_n, \quad \boldsymbol{p}_n := \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_n} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_n}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_n}\right) \tag{5.3.4}$$

を定義しました。任意の $\boldsymbol{a}$ について対称性が成り立つとすると、$\boldsymbol{P}$ が保存量になります。

5.4 角運動量

微小回転ベクトルを $\delta\boldsymbol{\varphi}$ とすると、原点を中心とする微小空間回転は

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{x} \tag{5.4.1}$$

で表されます。[*2] ここで

$$(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{x})_i = \epsilon_{ijk}\delta\varphi_j x_k \tag{5.4.2}$$

です。いま

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \epsilon\boldsymbol{b} \tag{5.4.3}$$

とおきます。

ここで ϵ_{ijk} はレビ=チビタ テンソルといって、その定義は i, j, k の添字のうちのどの 2 つを選んで入れ替えても符号が反対になるという性質をもつテンソル（これを完全反対称テンソルといいます）であって、かつ $\epsilon_{123} = 1$ を満たすものです。成分を書くと

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1 \tag{5.4.4}$$

であって、その他の成分はすべて 0 です。

$L = L(\boldsymbol{x}_n, \dot{\boldsymbol{x}}_n, t)$ がこの変換に対して不変であるとすると、Noether の定理で $Y = 0$ の場合に相当して、

$$Q = M_j b_j = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{b} \tag{5.4.5}$$

が保存量となります。ここで、（全）角運動量

$$M_j := \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{n,i}}\epsilon_{ijk}x_{n,k} = \sum_n \epsilon_{ijk}p_{n,i}x_{n,k} = \left(\sum_n \boldsymbol{x}_n\times\boldsymbol{p}_n\right)_j, \tag{5.4.6}$$

すなわち

$$\boldsymbol{M} := \sum_n \boldsymbol{x}_n\times\boldsymbol{p}_n \tag{5.4.7}$$

を定義しました。任意の $\boldsymbol{b}$ に対して対称性がある場合には、$\boldsymbol{M}$ そのものが保存量になります。

5.4.1 演習問題

1. (5.4.5) を導け。
2. $L = L(q_1, \cdots, q_{k-1}, q_{k+1}, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_k, \cdots, \dot{q}_N, t)$ のように Lagrangian が q_k に依存しないとき、この q_k を循環座標という。このとき、

[*2] 既に見たように任意の空間回転は Euler 角 (ψ, θ, ϕ) を用いて (4.1.5) のように表されますので、任意の微小回転ベクトル $\delta\boldsymbol{\varphi}$ による空間回転ももちろん Euler 角で表されますが、微小な Euler 角 (ψ, θ, ϕ) だけでは一般には表すことができないことに注意してください。

(a) Noether の定理から一般化運動量

$$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{5.4.8}$$

が保存量になることを示せ。

(b) 上の定理を E-L 方程式から直接証明せよ。

3. 平面上の中心力下の質点の Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - U(|\boldsymbol{x}|) \tag{5.4.9}$$

で与えられる。これを極座標 (r, θ) で書くと、θ が循環座標になることを示し、これに対応する保存量である一般化運動量 p_θ を求めよ。

第 6 章

拘束のある系

6.1　拘束条件

$\{q_i\}_{i=1,\cdots,N}$ は全て独立ではなく、

$$C_a(q_1,\cdots,q_N)=0;\quad a=1,\cdots,A \tag{6.1.1}$$

のように条件が加わる場合があります。このような条件を拘束条件といいます。

- 例１：滑車にかかる２質点

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}^2+m_1gx+m_2gy, \tag{6.1.2}$$

$$C=x+y-l \tag{6.1.3}$$

- 例２：球面振り子

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz, \tag{6.1.4}$$

$$C=x^2+y^2+(z-l)^2-l^2 \tag{6.1.5}$$

この場合、拘束条件を使って変数を N 個から $N-A$ 個の独立な変数に減らして Lagrangian を書き直せば良いのですが、これを実行するのが難しい場合もあります。

6.2　Lagrange の未定乗数法

拘束系の解析力学を扱う非常に便利な方法として Lagrange の未定乗数法が知られています。

Lagrange の未定乗数法

N 自由度の Lagrangian が $L = L(q, \dot{q}, t)$ で与えられていて、独立な A 個の拘束条件が $C_a(q) = 0$ $(a = 1, \cdots, A)$ $(A < N)$ であるとき、この系の E-L 方程式は、

$$L_C(q, \lambda, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{a=1}^{A} \lambda_a C_a(q) \tag{6.2.1}$$

の (q, λ) という $(N + A)$ 個の自由度に対する E-L 方程式と等価である。

簡単のため、$N = 2$, $A = 1$ の場合を考えます。一般の N や A の場合の証明は複雑ですが、本質的には $N = 2$, $A = 1$ の場合と同様です。

Proof. $L = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$, $C = C(x, y)$ とする。この場合、変分原理から

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x + \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \right] = 0 \tag{6.2.2}$$

であるが、δx と δy は独立ではなく、拘束条件 $C(x, y) = 0$ を変分して得られる式、

$$\frac{\partial C}{\partial x} \delta x + \frac{\partial C}{\partial y} \delta y = 0 \tag{6.2.3}$$

を満たす。この式から δy を消去すると、(6.2.2) の被積分関数は

$$\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\frac{\partial C}{\partial x}}{\frac{\partial C}{\partial y}} \right] \delta x \tag{6.2.4}$$

と書ける。これで独立変数 x の変分 δx だけになったので、$\delta S = 0$ から

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \lambda \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \tag{6.2.5}$$

が得られる。ただし、

$$\lambda = -\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial y}} \tag{6.2.6}$$

とおいた。この式は

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) + \lambda \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \tag{6.2.7}$$

と変形できる。(6.2.5), (6.2.7) は

$$L_C(x, y, \lambda, \dot{x}, \dot{y}, t) := L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) + \lambda C(x, y) \tag{6.2.8}$$

とおいて、(x, y, λ) を独立変数として L_C に関する E-L 方程式を立てたときの、x についての式、y についての式とそれぞれ等価である。また λ についての E-L 方程式からは $C(x, y) = 0$ が得られる。 □

6.2.1 演習問題

1. 斜面を滑りなく転がる太さのない車輪に関する Lagrangian と拘束条件は

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}^2 + Mgx\sin\beta, \tag{6.2.9}$$
$$C = x - a\theta \tag{6.2.10}$$

で与えられる。ただし、x は車輪の移動距離、θ は車輪の回転角、M は車輪の質量、a は車輪の半径、g は重力加速度、β は斜面の斜角である。

（a）Lagrange の未定乗数法を用いて運動方程式を書け。未定乗数を λ とする。

（b）$t = 0$ で $x = \dot{x} = 0$ であったとする。x, θ および λ を t の関数として求めよ。

（c）λ は物理的に何に対応するか考察せよ。

第 7 章

簡単な連成振動

7.1　調和振動子

質量 m の質点がばね定数 k のばねにつながっているとします。ばねの自然長（釣り合いの位置）からののびを x とすると、

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{7.1.1}$$

です。E-L 方程式の一般解は

$$x = A\cos(\omega t + \theta) \tag{7.1.2}$$

という単振動になります。ただし振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ であり、A と θ は定数です。これを調和振動子といいます。

7.2　３つのばねの連成振動

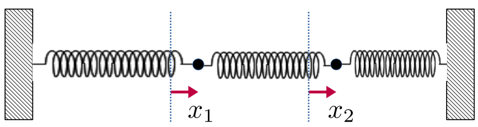

図 7.1　3 つのばねと 2 つの質点

図 7.1 のように、2 つの質点 1,2 の質量と同一直線上につながった 3 つのばね A,B,C があります。質点 1,2 は等しく m、3 つのばね A,B,C のばね定数も等しく k であるとします。A の左端と C の右端は壁に固定されているとします。x_1, x_2 を質点 1,2 の釣り合

いの位置からの変位とすると、ばねのポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} U(x_1,x_2) &= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \\ &= \frac{1}{2}k(2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2) \\ &= \frac{1}{2}(x_1,x_2)k\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

となります。すると Lagrangian は

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \left[\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\dot{x}_iM_{ij}\dot{x}_j - \frac{1}{2}x_iK_{ij}x_j = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^TM\dot{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^TK\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

とかけます。ただし、

$$M = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = k\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{7.2.3}$$

です。一般の連成振動では、行列 M と K は上の例とは異なる値をとりますが、対称行列であると仮定して一般性を失いません。

7.3 連成振動の解

このような系の解き方にはあるパターンがあります。これは結果的に行列の対角化をおこなっていることに対応しています。まず E-L 方程式を立てると、その k 成分は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\delta_{ik}M_{ij}\dot{x}_j + \frac{1}{2}\dot{x}_iM_{ij}\delta_{jk}\right) - \left(\frac{1}{2}\delta_{ik}K_{ij}x_j + \frac{1}{2}x_iK_{ij}\delta_{jk}\right) = 0 \tag{7.3.1}$$

と書けます。ここで δ_{ij} は Kronecker のデルタです。これを $M_{ij} = M_{ji}$ と $K_{ij} = K_{ji}$ を使って整理して、k 成分であったところを i 成分とすると、

$$M_{ij}\ddot{x}_j + K_{ij}x_j = 0 \tag{7.3.2}$$

が得られます。ここで $\boldsymbol{x}$ を複素数に拡張して

$$x_j = e^{i\omega t}\alpha_j \tag{7.3.3}$$

とおくと[*1]、

$$(-\omega^2M_{ij} + K_{ij})\alpha_j = 0 \tag{7.3.4}$$

[*1] $e^{i\omega t}$ の i は虚数単位であって、他の i のようにベクトルや行列の成分を表すものではないので、混同しないようにしてください。

が得られます。これを満たす $\alpha_j \neq 0$ が存在するためには、

$$\det(-\omega^2 M + K) = 0 \tag{7.3.5}$$

が成り立たなければなりません。これより

$$\det\left[\begin{pmatrix} -\omega^2 m + 2k & -k \\ -k & -\omega^2 m + 2k \end{pmatrix}\right] = 0 \tag{7.3.6}$$

これを解くと

$$\omega = \sqrt{3\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_+, \omega_- \tag{7.3.7}$$

となります。これを基準角振動数といいます。これは要するに行列 K の固有値を求めていることに他なりません。

次に基準振動モードを求めます。α_j を (7.3.4) から求めると、基準振動 ω_+, ω_- に応じて、定数倍を除くと

$$\boldsymbol{\alpha}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.3.8}$$

となります。これは先程求めた行列の固有値に対する固有ベクトルです。

$\boldsymbol{x}$ の一般解はつぎのようになります。

$$\boldsymbol{x}(t) = C_+ e^{i\omega_+ t}\boldsymbol{\alpha}_+ + C_- e^{i\omega_- t}\boldsymbol{\alpha}_-. \tag{7.3.9}$$

ここで、$C_\pm$ は複素数の定数です。ただし、$\boldsymbol{x}$ は物理的には実数でなければなりませんから、最終的には右辺の実部をとって

$$\boldsymbol{x}(t) = A_+ \cos(\omega_+ t + \theta_+)\boldsymbol{\alpha}_+ + A_- \cos(\omega_- t + \theta_-)\boldsymbol{\alpha}_-. \tag{7.3.10}$$

とする必要があります。ここで $A_\pm$, $\theta_\pm$ は実の定数です。

この結果を考察すると、質点の運動は２つの独立な基準振動からなり、基準振動の高振動数の方は２つの質点の振動が逆向き（より正確には逆位相）であり、低振動数の方は２つの質点の振動が同じ向き（より正確には同位相）に揃っていることがわかります。

7.3.1 演習問題

1. 7.2 節と同様だが、今度は 2 つの質点 1,2 の質量はともに m であるが、ばね A,B,C のばね定数はそれぞれ k, $2k$, k であるとする。
   (a) ばねによるポテンシャルエネルギー $U(x_1, x_2)$ を求めよ。

(b) Lagrangian を求めよ。

(c) Lagrangian を行列を用いて書いた時、行列 M と行列 K を求めよ。

(d) $x_j = e^{i\omega t}\alpha_j$ として、基準角振動数 ω を求めよ。

(e) 基準振動モードを求めよ。

(f) 一般解を求め、物理的に考察せよ。

第 8 章

Hamilton 形式 (1)

8.1 Hamiltonian

$L = L(q, \dot{q}, t)$ に対して、一般化運動量は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t) \tag{8.1.1}$$

で定義されます。これを $\dot{q}$ について解いて、

$$\dot{q} = \dot{q}(q, p, t) \tag{8.1.2}$$

と表せたとします。このとき、

Hamiltonian

$$H(q, p, t) = p\dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \tag{8.1.3}$$

を Hamiltonian と定義します。また (q, p) を正準変数といいます。

8.2 Hamilton の運動方程式

$L(q, \dot{q}, t)$ の全微分をとって、E-L 方程式と p の定義式を使うと、

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}dt \\ &= \dot{p}dq + pd\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}dt. \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

すると Hamiltonian の全微分は

$$dH = d(p\dot{q} - L) = (\dot{q}dp + pd\dot{q}) - dL = (\dot{q}dp + pd\dot{q}) - \left(\dot{p}dq + pd\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}dt\right)$$
$$= \dot{q}dp - \dot{p}dq - \frac{\partial L}{\partial t}dt. \tag{8.2.2}$$

と書けます。従って、$H = H(q,p,t)$ の偏微分は、

Hamilton の運動方程式

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{8.2.3}$$

と求まります。これを Hamilton の運動方程式といいます。

ここで $L(q,\dot{q},t)$ から (8.1.3) の変換によって、$H(q,p,t)$ のそれぞれの独立変数による偏微分が確定することは注目に値します。この変換により元の独立変数のうち $\dot{q}$ を p に入れ替えた独立変数の組に変更されたのです。これは Legendre 変換と呼ばれるより一般的な変換の例になっていて、$H(q,p,t)$ は $L(q,\dot{q},t)$ の $\dot{q}$ についての Legendre 変換であるといいます。[*1]

また、(8.2.2) から

$$\frac{dH}{dt} = \dot{q}\dot{p} - \dot{p}\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{8.2.4}$$

です。従って、L が t に陽に依存しない場合、これは (8.2.3) により H が t に陽に依存しないことと等価ですが、この場合 H は保存量です。これは (5.2.3) のエネルギー E に等しいことがわかります。

8.2.1 演習問題

1. １質点系で

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - U(\boldsymbol{x}) \tag{8.2.5}$$

で与えられる時、

(a) E-L 方程式を書き下せ。

(b) $\boldsymbol{x}$ に共役な運動量 $\boldsymbol{p}$ を求めよ。

[*1] 熱力学において、内部エネルギー $U(S,V)$ の全微分は $dU = TdS - pdV$ と書けます。内部エネルギー $U(S,V)$ からエンタルピー $H(S,p) = U(S,V(S,p)) + pV(S,p)$、Helmholtz の自由エネルギー $F(T,V) = U(S(T,V),V) - TS(T,V)$ への変換などは Legendre 変換の例として知られています。

(c) Hamiltonian $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ を求めよ。

(d) Hamilton の運動方程式を書き下せ。

(e) Hamilton の運動方程式が E-L 方程式と等価であることを確かめよ。

8.3 最小作用の原理

最小作用の原理

Hamilton の運動方程式は

$$S[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,[p\dot{q}(q,p,t) - H(q,p,t)] \tag{8.3.1}$$

の、境界条件 $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ における (q,p) についての停留条件から導かれる。

*2

Proof.

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\delta p\dot{q} + p\delta\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt}(p\delta q) + \delta p\dot{q} - \dot{p}\delta q - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\right] \\
&= [p\delta q]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-\left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\right)\delta q + \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p\right]
\end{aligned} \tag{8.3.2}$$

第一項は境界条件より消える。第二項が任意の δq, δp に対してゼロになるという条件から Hamilton の運動方程式が得られる。 □

*2 p に対する境界条件は課さないことに注意しましょう。

第 9 章

Hamilton 形式 (2)

9.1 位相空間

(q, p) は $2N$ 次元空間の座標になります。この空間を位相空間 (phase space) といいます。系の時刻 t における状態 $(q(t), p(t))$ は位相空間上の 1 点になります。時間が経過するとともに、この点は $2N$ 次元位相空間上に曲線を描きます。これを軌跡といいます。軌跡の接ベクトルは、Hamilton の運動方程式より、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q}(q, p, t) \end{pmatrix} \tag{9.1.1}$$

で与えられます。H が t に陽に依存しない場合、接ベクトルが一意的に定義できるので、軌跡は互いに交わりません。[*1]

9.1.1 演習問題

1. 調和振動子の Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{9.1.2}$$

で与えられる。

[*1] この場合、接ベクトルは位相空間のベクトル場を与えます。ベクトル場を接ベクトルとするような曲線のことを積分曲線といいます。つまり積分曲線は一階の常微分方程式 (9.1.1) の解です。積分曲線は決して交わりません。いま 2 つの積分曲線が点 P で交わるとすると、積分曲線は点 P で同一の初期値を持ちますから、常微分方程式の解の一意性の定理により、この 2 つの積分曲線は同一でなければなりません。

（a）Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{9.1.3}$$

で与えられることを示せ。

（b）Hamilton の運動方程式を書き下せ。

（c）運動方程式の解を求めよ。

（d）解を位相空間上の軌跡として描け。

9.2 Poisson 括弧

ここでは $\{q_i\}_{i=1,\cdots,N}$、$\{p_i\}_{i=1,\cdots,N}$ の成分添字を明示します。ただし和の記号は Einstein の規約によって省略します。

Poisson 括弧

$f = f(q,p,t)$, $g = g(q,p,t)$ に対して、Poisson 括弧を

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \tag{9.2.1}$$

によって定義する。

*2

これによって、次の恒等式が成り立ちます。

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{9.2.2}$$

$$\{q_i, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \tag{9.2.3}$$

$$\{p_i, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}, \tag{9.2.4}$$

$$\{q_i, p_j\} = -\{p_j, q_i\} = \delta_{ij}, \tag{9.2.5}$$

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0. \tag{9.2.6}$$

ただし δ_{ij} は Kronecker のデルタと呼ばれる記号で

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{9.2.7}$$

*2 Poisson 括弧は古典力学から量子力学に移るときに重要な役割を果たします。

です。さらに、次の性質があります。f, g, h を q, p, t の関数とし、a, b を q, p によらない量とすると、

$$\{f,g\} = -\{g,f\}, \tag{9.2.8}$$
$$\{f,a\} = 0, \tag{9.2.9}$$
$$\{f+g,h\} = \{f,h\}+\{g,h\}, \tag{9.2.10}$$
$$\{fg,h\} = \{f,h\}g + f\{g,h\}, \tag{9.2.11}$$
$$\{af,bg\} = ab\{f,g\} \tag{9.2.12}$$

さらに次の Jacobi 恒等式が成り立ちます。

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\} = 0. \tag{9.2.13}$$

証明は省略します。

Poisson 括弧の時間微分について、以下の恒等式が成り立ちます。

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \left\{\frac{df}{dt},g\right\} + \left\{f,\frac{dg}{dt}\right\} \tag{9.2.14}$$

証明は (9.2.2) と Jacobi 恒等式を用いればできます。この恒等式により、f と g が保存量ならば、$\{f,g\}$ も保存量です。

9.2.1 演習問題

1. 1 質点系の位置 $\boldsymbol{x}$, 運動量 $\boldsymbol{p}$, 角運動量 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$ について以下の性質を証明せよ。
   (a) $\{x_i, M_j\} = \epsilon_{ijk}x_k$
   (b) $\{p_i, M_j\} = \epsilon_{ijk}p_k$
   (c) $\{M_i, M_j\} = \epsilon_{ijk}M_k$
2. 恒等式 (9.2.2) を証明せよ。
3. 恒等式 (9.2.14) を証明せよ。

第 10 章

正準変換 (1)

10.1　正準変換

正準変数 (q, p) と Hamiltonian $H(q, p, t)$ の組があるとします。もちろん、Hamilton の運動方程式

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{10.1.1}$$

が成り立ちます。この時、

$$(q, p) \to (Q(q, p, t), P(q, p, t)) \tag{10.1.2}$$

という変換に対して、ある新 Hamiltonian $K(Q, P, t)$ が存在して、これに対する Hamilton の運動方程式

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \tag{10.1.3}$$

が成り立つ時、この変換を正準変換といいます。ただし通常は、さらに Poisson 括弧を不変に保つという条件を満たす変換だけを正準変換といいます。

10.1.1　演習問題

1. つぎの変換が正準変換であることを示せ。

   (a) 恒等変換

   $$Q = q, \quad P = p, \quad K(Q, P, t) = H(Q, P, t) \tag{10.1.4}$$

   (b) 定数倍変換 （a は 0 でない定数）

   $$Q = aq, \quad P = \frac{1}{a}p, \quad K(Q, P, t) = H\left(\frac{Q}{a}, aP, t\right) \tag{10.1.5}$$

（c）交換変換

$$Q = p, \quad P = -q, \quad K(Q,P,t) = H(-P,Q,t) \tag{10.1.6}$$

10.2 母関数 $F(q,Q,t)$ による正準変換

母関数 $F(q,Q,t)$ による正準変換

変換 $(q,p) \to (Q,P)$ が正準変換になるためには、ある関数 $F(q,Q,t)$ に対して

$$p = \frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial Q}, \quad K = H + \frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial t} \tag{10.2.1}$$

であればよい。このとき、$F(q,Q,t)$ をこの正準変換の母関数という。

Proof. まず、(10.2.1) を仮定すると

$$\left(p - \frac{\partial F}{\partial q}\right)\dot{q} - \left(P + \frac{\partial F}{\partial Q}\right)\dot{Q} + K - \left(H + \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0 \tag{10.2.2}$$

が任意の $\dot{q}$ と $\dot{Q}$ に対して成り立つことがわかる。これを変形すると

$$p\dot{q} - H(q,p,t) = P\dot{Q} - K(Q,P,t) + \frac{d}{dt}F(q,Q,t) \tag{10.2.3}$$

が得られる。この両辺を t_1 から t_2 まで t で定積分すると、

$$S[q,p] = S[Q,P] + [F(q,Q,t)]_{t_1}^{t_2} \tag{10.2.4}$$

が得られる。ただし、

$$S[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} [p\dot{q} - H(q,p,t)], \tag{10.2.5}$$

$$S[Q,P] = \int_{t_1}^{t_2} \left[P\dot{Q} - K(Q,P,t)\right] \tag{10.2.6}$$

である。(10.2.4) の両辺の $q(t)$ と $p(t)$ による変分を考える。ただし $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ とする。(10.2.4) の左辺の変分は、(8.3.2) と同様に、

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\right)\delta q\right] + [p\delta q]_{t_1}^{t_2} \tag{10.2.7}$$

となるから、$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ の境界条件の下では Hamilton の運動方程式により 0 になる。(10.2.4) の右辺の変分は

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\dot{Q} - \frac{\partial K}{\partial P} \right) \delta P - \left(\dot{P} + \frac{\partial K}{\partial Q} \right) \delta Q \right] + [P\delta Q]_{t_1}^{t_2} + \left[\frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \frac{\partial F}{\partial Q} \delta Q \right]_{t_1}^{t_2} \quad (10.2.8)$$

となる。ここで (10.2.1) の第 2 式を用いると、$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ の境界条件のもとでは境界項が消える。したがって、(Q, P) に対する Hamilton の運動方程式が導かれる。つまり、(q, p) から (Q, P) への変換は正準変換であることが言えた。 □

10.2.1 演習問題

1. 次の母関数をとったときの正準変換を求め、どのような変換であるか考察せよ。
   （a）$F = qQ$
   （b）定数 θ に対して、

$$F = \frac{2qQ - (q^2 + Q^2)\cos\theta}{2\sin\theta} \quad (10.2.9)$$

第 11 章

正準変換 (2)

11.1　正準変換を用いた解法

調和振動子

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{11.1.1}$$

に対して、母関数

$$F(q, Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q \tag{11.1.2}$$

による正準変換をおこないます。[*1]

すると

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \cot Q, \tag{11.1.4}$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{1}{2}m\omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}, \tag{11.1.5}$$

$$K(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P)) = \omega P \tag{11.1.6}$$

となります。ここで、K に Q 依存性が無いことに注意します。(Q, P) 系の Hamilton の運動方程式は

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \tag{11.1.7}$$

ですから、

$$Q = \omega t + \beta, \quad P = \alpha \tag{11.1.8}$$

---

*1

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \tag{11.1.3}$$

と解けてしまいます。ここで β, α は積分定数です。また K は t を陽に含まないので、$K=E$ は保存量です。これより、$\alpha=E/\omega$ と書けることがわかります。

一般に新 Hamiltonian K を $K=K(P)$ のように Q を含まないように書ければ、Hamilton の運動方程式から、

$$\dot{P}=0 \tag{11.1.9}$$

ですから、$P=\alpha=$const と積分できて、

$$\dot{Q}=\frac{dK}{dP}(\alpha)=\text{const} \tag{11.1.10}$$

ですので、この定数を ω とおけば

$$Q=\omega t+\beta \tag{11.1.11}$$

と積分できてしまいます。ここで β は積分定数です。元の系の変数 (q,p) を求めるには、正準変換の式、

$$\begin{cases} p=\dfrac{\partial F}{\partial q}(q,\omega t+\beta,t), \\ \alpha=-\dfrac{\partial F}{\partial Q}(q,\omega t+\beta,t) \end{cases} \tag{11.1.12}$$

の第二式を q について解いて、

$$q=q(\omega t+\beta,\alpha,t) \tag{11.1.13}$$

とし、これを第一式に代入して、

$$p=\frac{\partial F}{\partial q}(q(\omega t+\beta,\alpha,t),\omega t+\beta,t) \tag{11.1.14}$$

と求まります。

11.1.1 演習問題

1. 11.1 節で調和振動子の問題を正準変換を用いて (Q,P) を t の関数として求めたが、これを用いて元の変数 (q,p) を t の関数として求めよ。

11.2 母関数 $\Phi(q,P,t)$, $\Psi(p,Q,t)$, $\Xi(p,P,t)$ による正準変換

母関数 $F(q,Q,t)$ による正準変換は恒等変換を含む点変換

$$Q=f(q,t) \tag{11.2.1}$$

を表すことができないという欠点があります。

そこで $F(q,Q,t)$ による正準変換 (10.2.1) の第二式を Q について解けるとき、$Q = Q(q,P,t)$ として $F(q,Q,t)$ の Q についての Legendre 変換

$$\Phi(q,P,t) = F(q,Q(q,P,t),t) + PQ(q,P,t) \tag{11.2.2}$$

を考えて、独立変数を (q,P,t) とします。F の全微分は

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q}dq + \frac{\partial F}{\partial Q}dQ + \frac{\partial F}{\partial t}dt = pdq - PdQ + \frac{\partial F}{\partial t}dt \tag{11.2.3}$$

だったので、Φ の全微分は

$$d\Phi = d(F+PQ) = pdq - PdQ + \frac{\partial F}{\partial t}dt + PdQ + QdP = pdq + QdP + \frac{\partial F}{\partial t}dt \tag{11.2.4}$$

という式になります。よって、次が得られます。

$\Phi(q,P,t)$ を母関数とする正準変換

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial P}, \quad K = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{11.2.5}$$

つぎに $F(q,Q,t)$ の正準変換の式 (10.2.1) の第一式を q について解けるとき、$q = q(p,Q,t)$ として q についての Legendre 変換

$$\Psi(p,Q,t) = F(q(p,Q,t),Q,t) - pq(p,Q,t) \tag{11.2.6}$$

と定義すると、Ψ の全微分は (11.2.3) を使うと

$$d\Psi = dF - d(pq) = -qdp - PdQ + \frac{\partial F}{\partial t}dt \tag{11.2.7}$$

となるので、次が得られます。

$\Psi(p,Q,t)$ を母関数とする正準変換

$$q = -\frac{\partial \Psi}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial \Psi}{\partial Q}, \quad K = H + \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{11.2.8}$$

また、$F(q,Q,t)$ の正準変換の式 (10.2.1) の第一式と第二式から q と Q を p と P と t で表すことができるとき、$q = q(p,P,t)$, $Q = Q(p,P,t)$ として $F(q,Q,t)$ の q, Q 両方についての Legendre 変換

$$\Xi(p,P,t) = F(q(p,P,t),Q(p,P,t),t) - pq(p,P,t) + PQ(p,P,t) \tag{11.2.9}$$

を考えると、Ξ の全微分は (11.2.3) を使うと

$$d\Xi = dF - d(pq) + d(PQ) = -qdp + QdP + \frac{\partial F}{\partial t}dt \tag{11.2.10}$$

ですので、次が得られます。

Ξ(p, P, t) を母関数とする正準変換

$$q = -\frac{\partial \Xi}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial \Xi}{\partial P}, \quad K = H + \frac{\partial \Xi}{\partial t}. \tag{11.2.11}$$

11.2.1 演習問題

1. $\Phi = f(q,t)P$ を母関数とする正準変換が点変換 $Q = f(q,t)$ を与えることを示せ。
2. (q,p) の回転変換は、
$$\Phi = \frac{2qP + \sin\theta(q^2 + P^2)}{2\cos\theta} \tag{11.2.12}$$
を母関数とする正準変換であることを示せ。
3. $\Psi = -pQ$ を母関数とする正準変換が恒等変換を与えることを示せ。
4. $\Psi = -pf^{-1}(Q,t)$ を母関数とする正準変換が点変換 $Q = f(q,t)$ を与えることを示せ。

第 12 章

正準変換 (3)

12.1 微小正準変換

恒等変換からわずかにずれた正準変換 $(q,p)\to(Q,P)$

$$Q = q + \delta q(q,p,t), \tag{12.1.1}$$

$$P = p + \delta p(q,p,t) \tag{12.1.2}$$

を考えるため、恒等変換を生成できる母関数 $\Phi(q,P,t)$ を用います。このとき

$$p = \frac{\partial\Phi}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial\Phi}{\partial P}, \quad K = H + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{12.1.3}$$

です。恒等変換は $\Phi = qP$ によって得られるので、そこからわずかにずれた母関数

$$\Phi = qP + \epsilon G(q,P,t) \tag{12.1.4}$$

を考えます。ただし ϵ は任意の微小な定数。するとただちに

$$\delta q = \epsilon\frac{\partial G(q,P,t)}{\partial P}, \quad \delta p = -\epsilon\frac{\partial G(q,P,t)}{\partial q} \tag{12.1.5}$$

が成り立ちますが、いま (q,p) と (Q,P) は ϵ の 1 次のずれしかもっていないので、$O(\epsilon^2)$ を無視すると、

無限小正準変換

$$\delta q = \epsilon\frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p}, \quad \delta p = -\epsilon\frac{\partial G(q,p,t)}{\partial q} \tag{12.1.6}$$

と書くことが可能です。そこで $G(q,p,t)$ を無限小正準変換の母関数といいます。

そこで (q,p,t) の任意関数 $f=f(q,p,t)$ の変換を考えると、

$$\delta f=\frac{\partial f}{\partial q}\delta q+\frac{\partial f}{\partial p}\delta p=\epsilon\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q}\right)=\epsilon\{f,G\} \tag{12.1.7}$$

と Poisson 括弧で書けます。

12.2 微小正準変換と保存量

$G(q,p,t)=H(q,p,t)$ (H は Hamiltonian) ととってみると、$f(q,p)$ に対して、

$$\delta f=\epsilon\{f,H\}=\epsilon\frac{df}{dt} \tag{12.2.1}$$

であることがわかります。この変換は微小時間並進 $t\to t'=t+\epsilon$ です。

次に N 質点系で

$$G(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{p}_n)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P} \tag{12.2.2}$$

としましょう。ここで $\boldsymbol{a}$ は任意の定数ベクトルであり、

$$\boldsymbol{P}=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{p}_n \tag{12.2.3}$$

は運動量です。$n=1,\cdots,N$ は粒子に付けられた番号です。すると、この正準変換によって質点の位置が

$$\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}'_n=\boldsymbol{x}_n+\epsilon\delta\boldsymbol{x}_n \tag{12.2.4}$$

と変換されるとすると、

$$\delta\boldsymbol{x}_n=\{\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P}\}=\boldsymbol{a} \tag{12.2.5}$$

です。つまり、これは微小空間並進です。

次に N 質点系で

$$G(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{p}_n)=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{M} \tag{12.2.6}$$

とします。ここで $\boldsymbol{b}$ は任意の定数ベクトルであり、

$$\boldsymbol{M}=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}_n\times\boldsymbol{p}_n \tag{12.2.7}$$

は角運動量です。このとき、

$$\delta\boldsymbol{x}_n=\{\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{M}\}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{x}_n \tag{12.2.8}$$

ですから、微小空間回転です。

このように保存量はそれに対応する微小正準変換を生成します。これは一般化されて以下の定理に集約されます。

対称性と保存量

Noether の定理から得られる保存量を母関数とする微小正準変換は、Lagrangian の対称性である元の微小変換を引き起こす。

Proof. Lagrangian $L(q,\dot{q},t)$ が微小変換

$$q \to q' = q + F(q,\dot{q})\epsilon \tag{12.2.9}$$

$$\dot{q} \to \dot{q}' = \dot{q} + \frac{d}{dt}F(q,\dot{q})\epsilon \tag{12.2.10}$$

に対して

$$L(q',\dot{q}',t) - L(q,\dot{q},t) = \frac{d}{dt}Y(q,\dot{q},t)\epsilon \tag{12.2.11}$$

を満たすときに、

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}F - Y = pF - Y \tag{12.2.12}$$

という保存量が存在するというのが Noether の定理の内容である。

このとき Q を q,p の関数 $Q(q,p)$ として書いて、$\{q,Q\}$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\{q,Q\} &= \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}[pF(q,\dot{q}(q,p)) - Y(q,\dot{q}(q,p)))] \\ &= F + \left(p\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial Y}{\partial \dot{q}}\right)\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\end{aligned} \tag{12.2.13}$$

である。

ここで、(12.2.9), (12.2.10), (12.2.11) より

$$\frac{\partial L}{\partial q}F + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial Y}{\partial q}\right)\dot{q} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial Y}{\partial \dot{q}}\right)\ddot{q} = 0 \tag{12.2.14}$$

が得られる。この式で左辺の第一項と第二項は q と $\dot{q}$ だけに依存して $\ddot{q}$ には依存せず、$\ddot{q}$ に依存するのは左辺の第三項だけであることに注意しよう。この式が任意の $q,\dot{q},\ddot{q}$ に関する恒等式として成り立つためには、左辺第三項の $\ddot{q}$ の係数が 0 でなければならない。したがって、

$$p\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial Y}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{12.2.15}$$

である。

これを (12.2.13) に代入すると

$$\{q, Q\} = F \tag{12.2.16}$$

が言える。これによって、Q を母関数とする微小正準変換は $q \to q' = q + F\epsilon$ という変換を引き起こすことが示された。 □

12.2.1 演習問題

1. (12.2.1) を確かめよ。
2. (12.2.5) を確かめよ。
3. (12.2.8) を確かめよ。

12.3 正準変換の性質

正準変換の合成変換も正準変換です。正準変換の全体は群をなします。これは次のようなことを意味します。任意の正準変換 T, T_1, T_2, T_3 に対して、

- $T_1 T_2$ も正準変換である。
- $(T_3 T_2) T_1 = T_3 (T_2 T_1)$ が成り立つ。
- 恒等変換 1 も正準変換であり、$1 \cdot T = T \cdot 1 = T$ を満たす。
- T に対して逆正準変換 T^{-1} が存在し、$T^{-1} T = T T^{-1} = 1$ を満たす。

有限の時間並進は無限小時間並進を無限に合成することで構成できるので、有限時間並進も正準変換です。

正準変換では位相空間内の体積要素は不変に保たれます。これを Liouville の定理といいます。

Liouville の定理

正準変換でつながった 2 つの正準変数 (q, p), (Q, P) に対して、位相空間の体積要素について

$$d^N q d^N p = d^N Q d^N P \tag{12.3.1}$$

が成り立つ。特に時間発展に対して、位相空間の体積要素は不変である。

証明は省略します。

第 13 章

Hamilton-Jacobi 理論 (1)

13.1　Hamilton-Jacobi 方程式

うまい正準変換を見つけると運動方程式が簡単に解けます。その究極のものは $K(Q,P,t)=0$ にすることです。このとき、Hamilton の運動方程式から、

$$\dot{Q}=0,\quad \dot{P}=0 \tag{13.1.1}$$

となるので、直ちに

$$Q=\beta,\quad P=\alpha \tag{13.1.2}$$

と積分できます。ただし、β, α は積分定数です。

母関数 $\Phi(q,P,t)$ による正準変換によって $K(Q,P,t)=0$ を達成しましょう。これは

$$p=\frac{\partial\Phi(q,P,t)}{\partial q},\quad Q=\frac{\partial\Phi(q,P,t)}{\partial P},\quad K(Q,P,t)=H(q,p,t)+\frac{\partial\Phi(q,P,t)}{\partial t} \tag{13.1.3}$$

において $K=0$ とすればよいのです。このときの $\Phi(q,P,t)$ を $S(q,\alpha,t)$ と書いて、Hamilton の主関数といいます。すなわち、

$$p=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q},\quad \beta=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha},\quad H(q,p,t)+\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial t}=0 \tag{13.1.4}$$

です。そこで、

Hamilton-Jacobi 方程式

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q}(q,\alpha,t),t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}(q,\alpha,t)=0 \tag{13.1.5}$$

と書いて、これを Hamilton-Jacobi (H-J) 方程式といいます。[*1] ここで $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ は H-J 方程式の解のパラメータとなっていますが、まだこの α を選ぶ自由度は残っていることに注意してください。

H-J 方程式は $S(q, \alpha, t)$ に対する $(N+1)$ 変数 (q, t) の 1 階の偏微分方程式であるので、完全解は $(N+1)$ 個の任意定数をもちます。[*2] これを $c_0, c_1, \cdots, c_N$ としましょう。H-J 方程式の S は常に q または t で偏微分された形でしか入っていないので、その解には任意定数を加える自由度があります。この任意定数を c_0 としましょう。この c_0 は物理的には意味がない定数です。残りの $c_1, \cdots, c_N$ は解の物理的なパラメータになっています。残っていた α を選ぶ自由度を使って、この $c_1, \cdots, c_N$ を $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ に同定します。

(q, p) を t の関数として得るには、(13.1.4) より、

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, \alpha, t), \quad \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}(q, \alpha, t) \tag{13.1.6}$$

の第二式を q について解いて

$$q = q(\beta, \alpha, t) \tag{13.1.7}$$

を求め、第一式に代入して

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(q(\beta, \alpha, t), \alpha, t) \tag{13.1.8}$$

とすれば良いのです。定数 (β, α) は初期条件 $(q(t_0), p(t_0)) = (q_0, p_0)$ から決定されます。

H-J 方程式の解として $q(t)$ が得られたとすると、$S = S(q, \alpha, t)$ について、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial S}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial S}{\partial t} = p\dot{q} - H(q, p, t) = L(q, \dot{q}, t) \tag{13.1.9}$$

が成り立つので、

$$S(q(t), \alpha, t) = \int^t d\tilde{t} L(q(\tilde{t}), \dot{q}(\tilde{t}), \tilde{t}) \tag{13.1.10}$$

が得られます。これは Hamilton の主関数 $S(q, \alpha, t)$ と作用 $S[q]$ の関係を与えます。

13.2 H が t に陽に依存しない場合

Hamiltonian H が t に陽には依存しない場合を考えましょう。この場合、変数分離法で H-J 方程式が次のように時間積分できます。H-J 方程式においては $S(q, \alpha, t)$ の α は

[*1] Hamilton の主関数は古典力学から量子力学に移る際に重要な役割を果たします。

[*2] 1 階の偏微分方程式において独立変数の個数分の任意定数を持つ解のことを完全解といいます。これは解が持ちうる任意定数の最大個数です。

定数のパラメータに過ぎないので、一旦省略しましょう。

$$S(q,t) = W(q) + Y(t) \tag{13.2.1}$$

という変数分離形を仮定すると、H-J 方程式は

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q)\right) + \frac{dY}{dt}(t) = 0 \tag{13.2.2}$$

という形になります。この式の左辺第一項は q のみに依存し、第二項は t のみに依存するので、これらは定数でなければなりません。この定数を一旦 c_1 と書いておきますが、いま α を選ぶ自由度を使ってこの c_1 を α_1 に同定することにします。すると、

$$\begin{cases} H\left(q, \dfrac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1, \\ \dfrac{dY}{dt} = -\alpha_1 \end{cases} \tag{13.2.3}$$

となります。(13.2.3) の第二式は直ちに積分できて

$$Y = -\alpha_1 t + Y_0 \tag{13.2.4}$$

となりますが、Y_0 の方は W に吸収させましょう。(13.2.3) の第一式の偏微分方程式は α_1 をパラメータとしていますから、W は α_1 に依存します。またこの偏微分方程式は N 変数 q による一階の偏微分方程式ですので、この完全解は N 個の任意定数 $c_0, c_2, \cdots, c_N$ を含みます。そのうちのうちの一つ、例えば c_0 は単に W に任意定数を足す自由度に対応していてそれは物理的に意味がないので無視すると、第一式の完全解は

$$W = W(q, \alpha_1, c_2, \cdots, c_N) \tag{13.2.5}$$

と書けます。ここで $\alpha_2, \cdots, \alpha_N$ を選ぶ自由度を使って、$c_2, \cdots, c_N$ を $\alpha_2, \cdots, \alpha_N$ に同定すると、第一式の完全解は

$$W = W(q, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N) = W(q, \alpha) \tag{13.2.6}$$

と書けます。ここで $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ です。これより、S は

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_1 t \tag{13.2.7}$$

と表せます。$W(q, \alpha)$ を Hamilton の特性関数といいます。(13.1.6) の第二式から

$$\beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}(q, \alpha) - t, \quad \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}(q, \alpha) \quad (i = 2, \cdots, N) \tag{13.2.8}$$

によって定まります。これらを q について解けば

$$q = q(\tilde{\beta}, \alpha, t + \beta_1) \tag{13.2.9}$$

が得られます。ただし、$\tilde{\beta} = (\beta_2, \cdots, \beta_N)$ と置きました。p は (13.1.6) の第一式から

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}(q(\tilde{\beta}, \alpha, t + \beta_1), \alpha) \tag{13.2.10}$$

と得られます。

13.2.1 演習問題

1. (13.2.3) の変数分離定数 α_1 は物理的にはどのような意味があるだろうか？考察せよ。
2. １次元自由粒子の Hamiltonian は

$$H = \frac{p^2}{2m} \tag{13.2.11}$$

で与えられる。この系の運動を 13.2 節の定式化に従って解け。

第 14 章

Hamilton-Jacobi 理論 (2)

14.1 H が t に陽に依存しない場合のもう一つの定式化

H が t に陽に依存しない場合を考えます。これまで H-J 理論では $\Phi(q,P,t)=S(q,P,t)$ として $K=0$ となる正準変換を見つける方針でしたが、今度は $\Phi(q,P,t)=W(q,P)$ として正準変換をおこなってみます。$W(q,P)$ は t に依存しないので、

$$Q=\frac{\partial W}{\partial P}(q,P), \quad p=\frac{\partial W}{\partial q}(q,P), \quad K=H \tag{14.1.1}$$

ですが、W は特性関数なので

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=\alpha_1 \tag{14.1.2}$$

を満たします。そこで $P_1=\alpha_1$ と選ぶと、$K=P_1$ ですから、これはまさに 11.1 節で扱った K が Q に依存しない場合にあたります。Hamilton の運動方程式

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial K}{\partial P_i}=\delta_{i1}, \quad \dot{P}_i=-\frac{\partial K}{\partial Q_i}=0 \tag{14.1.3}$$

は

$$Q_i=\delta_{i1}t+\beta_i, \quad P_i=\alpha_i \tag{14.1.4}$$

と解けます。W は (14.1.2) を解くことによって

$$W=W(q,\alpha_1,\tilde{\alpha}) \tag{14.1.5}$$

と決まります。ただし、$\tilde{\alpha}=(\alpha_2,\cdots,\alpha_N)$ であり、もう一つの任意定数は W に足すことのできる物理的でない任意の定数で、これは W に吸収させましょう。(14.1.1) の第一式

を q について解き、それを第二式に代入することによって、次のように q と p が求まります。

$$q = q(\tilde{\beta}, \alpha, t + \beta_1), \quad p = \frac{\partial W}{\partial q}(q(\tilde{\beta}, \alpha, t + \beta_1), \alpha) \tag{14.1.6}$$

14.1.1 演習問題

1. １次元調和振動子の Hamiltonian は

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \tag{14.1.7}$$

で与えられる。この系の運動を 14.1 節の定式化に従って解け。

14.2 作用変数・角変数

H-J 理論では α の選び方に任意性があります。いま H が t に陽に依存しない場合を考えます。さらにここでは簡単のため 1 自由度系で考えましょう。周期運動の場合、α_1 のかわりに

$$J(\alpha_1) = \oint p dq = \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq \tag{14.2.1}$$

を使うことができます。そして $W = W(q, \alpha_1(J))$ と書いて、

$$w := \frac{\partial W(q, \alpha_1(J))}{\partial J} = \frac{\partial W(q, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} \frac{d\alpha_1}{dJ} \tag{14.2.2}$$

を考えます。J と w をそれぞれ作用変数、角変数とよびます。14.1 節の議論で、$P_1 = \alpha_1$ と選ぶのをやめて $P_1 = J$ と選べば、Q_1 が w にあたります。この場合 (14.1.3) は、

$$\dot{w} = \frac{d\alpha_1}{dJ}, \quad \dot{J} = 0 \tag{14.2.3}$$

となるので、$J =$ 定数であり、w の解は

$$w = \nu t + \beta_J, \quad \nu := \frac{d\alpha_1}{dJ} \tag{14.2.4}$$

となります。ここで ν も β_J も時間に依存しない定数です。w の一周期での増分を Δw とすると、

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial J} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = \frac{\partial J}{\partial J} = 1 \tag{14.2.5}$$

となります。従って、ν は周期の逆数、つまり振動数です。

14.2.1 演習問題

1. １次元調和振動子について
   (a) エネルギーを E とすると、作用変数は $J = 2\pi E/\omega$ であることを示せ。
   (b) W を (q, J) の関数として求めよ。
   (c) w を (q, J) の関数として求めよ。
   (d) ν を求めよ。

参考文献

[1] 畑浩之, 『解析力学』, (東京図書, 2014)