「自然科学の探究」
時空観の変遷

原田知広

立教大学理学部

2023 年度春学期 @ 立教大学

今日の目標

1. ４次元時空を理解する
2. ローレンツ変換を理解する
3. 時間の遅れを理解する

Outline

4 次元時空

- 次元・空間・時空
  - 黒板の上は座標 (x, y) で点を指定。２次元空間。
  - 我々の空間では座標 (x, y, z) で点を指定。３次元空間。
  - 人と会うには時刻も指定。事象 (t, x, y, z)。４次元時空。
  - 運動する物体の経路は $(t, x(t), y(t), z(t))$ と４次元時空内に曲線を描く。これをこの物体の世界線という。

Outline

中学物理

慣性の法則

物体に力が働かないとき、静止している物体は静止し続け、運動している物体はそのまま等速直線運動する。

- 慣性の法則が成り立つ系（座標系）=慣性系
- 物体の世界線 $(t, x(t))$ の「接線の傾き」(導函数または微分) を

$$v = \frac{dx}{dt}(t)$$

と書く。これは（瞬間的な）物体の速度である。

- **２つの慣性系間の変換**
  - S を慣性系とする。S に対して一定の速度 V で等速直線運動する系 S′ を考える。
  - 絶対時間: どの観測者にも同じ時間が流れている。

$$t' = t$$

  - $x' = 0$ は $x = Vt$ に変換されるべき。

ガリレイ変換

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - Vt \end{cases}$$

ガリレイ変換における座標軸

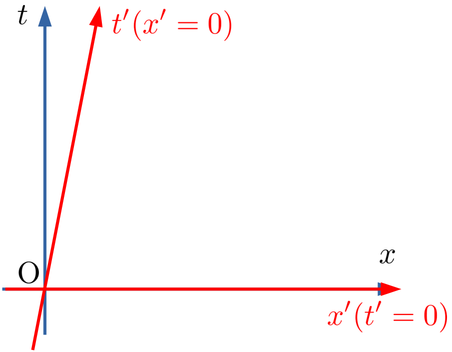

Figure: ガリレイ変換における座標軸の関係

- t' 軸と x' 軸を xt 平面に描く。
  - t' 軸：$x'=0$ だが、これは $x=Vt$ になる。
  - x' 軸：$t'=0$ だが、これは $t=0$ になる。

速度の変換則

- S′ 系での速度 v' を S 系の速度 v を使って表す。

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x - Vt) = \frac{dx}{dt} - V$$

速度の加算性

$$v' = v - V$$

Outline

光の速さ

- 電磁気学: 光は $c \simeq 300000$km/s (秒速 30 万 km) で伝播する。
- 疑問
  - 光の速さはどの慣性系に対する速さなのか？
  - 光速が c で一定であるような特別な慣性系があるのか？あるならそれを絶対静止系とよぼう。
  - 速度の加算性によると向きによって光速が異なる。

$$c'_+ = c - V, \quad c'_- = -c - V$$

  - これはマイケルソン・モーリーの実験結果に反する。

特殊相対性原理

- アインシュタインの提案

特殊相対性原理

  - 全ての慣性系で物理法則は同一である。
  - 全ての慣性系で真空中の光速は同一である。（光速度不変の原理）

- つまり「絶対静止系」などなく、無数にある慣性系の関係はすべて「相対的」なものである。→「相対性」理論の由来。

Outline

時空における新しい距離

- **世界間隔**
  ２つの事象 A,B **の** S **系での** A, B **の座標を**
  $(t, x) = (t_A, x_A)$, $(t, x) = (t_B, x_B)$ **とする。**
  $\Delta t = t_B - t_A$, $\Delta x = x_B - x_A$ **とする。**

世界間隔

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2$$

- S′ **系でも** $\Delta t' = t'_B - t'_A$, $\Delta x' = x'_B - x'_A$ **として、**

$$\Delta s'^2 = -c^2 \Delta t'^2 + \Delta x'^2$$

と書く。

光の経路と世界間隔

- 事象 A から出た光が事象 B に達したとする。
- S 系で光速が c であることから、

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| = c$$

であるから $\Delta s^2 = 0$ である。逆も真である。

- S′ 系でも光速が c なら同様に $\Delta s'^2 = 0$ が言える。これも逆も真である。

世界間隔を不変にする変換

- 一般の２つの事象 A,B 間の世界間隔を考えよう。
- S と S′ の間の座標変換として $\Delta s^2 = \Delta s'^2$ となるような座標変換を考える。
- この場合、S でも S′ でも光速は c で一定である。

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| = c \Leftrightarrow \Delta s^2 = 0 \Leftrightarrow \Delta s'^2 = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right| = c$$

Outline

一次変換の要請

- **一次変換**

$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = a_{10}t + a_{11}x \end{cases} \tag{1}$$

- $a_{00} > 0,\ a_{11} > 0$ としよう。

相対速度 V の２つの慣性系

- S′ が S に対して一定の速度 V で動いているなら、$x' = 0$ の S 系でみた軌跡は $x = Vt$ となる。従って式 (1) から

$$a_{10} + a_{11}V = 0$$

でなければならないことがわかる。

世界間隔不変の要請

- ２つの事象ＡとＢについて

$$\begin{cases} \Delta t' = a_{00}\Delta t + a_{01}\Delta x \\ \Delta x' = a_{10}\Delta t + a_{11}\Delta x \end{cases}.$$

- ここで $\Delta s^2 = \Delta s'^2$ であることを要請すると、任意の $\Delta t, \Delta x$ について

$$-c^2(a_{00}\Delta t+a_{01}\Delta x)^2+(a_{10}\Delta t+a_{11}\Delta x)^2 = -c^2\Delta t^2+\Delta x^2$$

が成り立たなければならない。両辺で、Δt^2, $\Delta t\Delta x$, Δx^2 の係数を比較することによって関係式が３つ得られる。

連立方程式

- これらをまとめて、連立方程式

$$
\begin{cases}
a_{10} + a_{11}V = 0 \\
-c^2 a_{00}^2 + a_{10}^2 = -c^2 \\
-2c^2 a_{00}a_{01} + 2a_{10}a_{11} = 0 \\
-c^2 a_{01}^2 + a_{11}^2 = 1
\end{cases}
$$

  が得られる。
- これは未知数が $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}$ の４つで４本の連立方程式だから一般に解ける。

連立方程式の解

- straightforward だがやや長い計算のあとで

$$a_{00} = a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}},$$

$$a_{01} = -\frac{V}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}},$$

$$a_{10} = -\frac{V}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

が得られる。

ローレンツ変換

ローレンツ変換

$$\begin{cases} t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right) \\ x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}(-Vt + x) \end{cases}$$

- より正確には x 軸方向のローレンツブースト

ローレンツ変換における座標軸

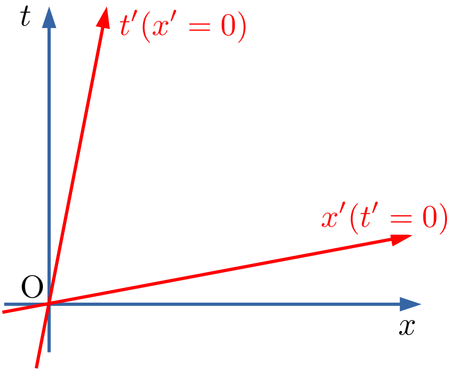

Figure: ローレンツブーストにおける座標軸の関係

- t' 軸と x' 軸を xt 平面に描く。
  - t' 軸: $x'=0$ だが、これは $t=\frac{1}{V}x$ になる。
  - x' 軸: $t'=0$ だが、これは $t=\frac{V}{c^2}x$ になる。

光速度不変の原理の帰結

- ローレンツ変換では世界間隔が不変に保たれる。
- ガリレイ変換は打ち捨てられる。
- 絶対時間は存在しない。
- 時間と空間は対等に扱われる。
- S 系の同時刻面 (t = 一定) は S′ 系の同時刻面 (t' = 一定) とは異なる。
- ここまで x 軸上の事象しか考えなかったが、y 軸、z 軸を加えても本質的には同じである。

Outline

花子と太郎

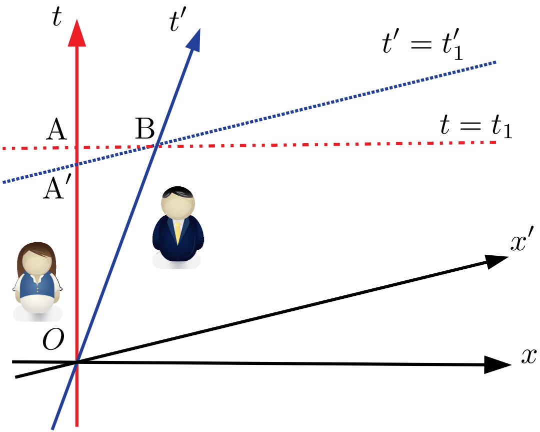

Figure: **時間の遅れを示す概念図**

花子は速度 V で運動する太郎を観測する

状況設定

- 初期設定
  - 花子: S 系で $x = 0$ に静止。時計の読みは t。
  - 太郎: S′ 系で $x' = 0$ に静止。時計の読みは t'。
  - $t = t' = 0$ に $x = x' = 0$ で二人は会った（事象 O）。
- 花子が自分と同時刻の太郎の時計を観測する。
  - 花子が $t = t_1$ のときを事象 A とする。
  - 花子にとって事象 A と同時刻には太郎は事象 B。
  - 事象 B の座標を S 系で $(t, x) = (t_1, x_1)$ および S′ 系で $(t', x') = (t'_1, 0)$ としよう。

時間の遅れの導出

- 事象 B の S′ 系での時間座標 t'_1 を t_1 で表す。
  - 事象 B の座標を S 系で求める。
    直線 OB$t = \frac{1}{V}x$ と直線 AB$t = t_1$ の交点 B の S 系での x 座標は $x_1 = Vt_1$。
  - S′ 系にローレンツ変換する。
    事象 B の S 系での座標 $(t, x) = (t_1, Vt_1)$ をローレンツ変換の式に代入すると、事象 B の S′ 系での t' 座標 t'_1 が

$$t'_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}\, t_1$$

と求まる。

時間の遅れ

時間の遅れの式

$$t'_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}\, t_1$$

- 太郎の時計の読み t'_1 は花子の時計の読み t_1 の $\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$ 倍である。この因子は 1 以下。
- 例えば $V = \frac{4}{5}c$ であれば、$t' = \frac{3}{5}t$ となり、太郎の時間の進みは花子の 60% しかない。

Outline

まとめとリアクションペーパー

- まとめ
  - ３次元空間→４次元時空
  - 相対論以前は、絶対時間＋ガリレイ変換。
  - 特殊相対性原理: 全ての慣性系において光速度一定。
  - 帰結：世界間隔の不変性。ローレンツ変換。時間と空間の対等性。同時刻の相対性。時間の遅れ。

- リアクションペーパーに書いて提出して下さい。
  1. 本日の授業で出てきた式一つとその説明
  2. 本日の授業に関する質問があればその質問