

2025 年度春学期「自然科学の探究」『時空観の変遷』 講義ノート（暫定版）

原田知広 *

2025 年 4 月 25 日

概要

これは 2025 年度春学期開講の「自然科学の探究」のうちの一回分である『時空観の変遷』の講義ノートです。義務教育である中学校までの数学や理科の知識は前提としています。授業はプレゼンテーション用のスライドを使いますが、この講義ノートも適宜併用して下さい。

これは暫定版ですので誤りがあるかもしれません。また皆さんの質問等に対してコメントも入れていきます。随時更新してこちらに置いておきます。

Lecture notes:

https://www2.rikkyo.ac.jp/web/harada/sizen_spacetime_2025_lecturenotes.pdf



Q & A:

https://www2.rikkyo.ac.jp/web/harada/sizen_spacetime_2025_qanda.pdf



* 立教大学理学部物理学科

目次

1	4次元時空	3
2	相対論以前	3
3	特殊相対性原理	5
4	特殊相対論とその帰結	6
5	ローレンツ変換	7
6	時間の遅れ	9
6.1	直接導く方法	9
6.2	ローレンツ変換から導く	11
6.3	時間の遅れの練習問題	12
7	まとめ	12

1 4次元時空

- 黒板の上では、座標 (x, y) で点を指定します。これは2次元空間です。
- 空間的には、座標 (x, y, z) で場所（点）を指定します。これは3次元空間です。
- 人と会うには時刻も指定します。事象 (t, x, y, z) といいます。これは4次元時空です。
- 図1のように、運動する物体の位置 (x, y, z) は時々刻々と変化します。その経路は $(t, x(t), y(t), z(t))$ と4次元時空内に曲線を描きます。これをこの物体の世界線といいます。

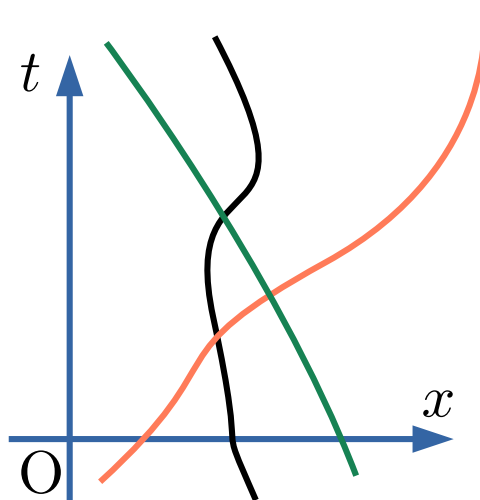


図1 時空図と3本の世界線

2 相対論以前

- 物体の位置と速度
 - － 簡単のため x 軸上の運動だけ考えましょう。物体の世界線は $(t, x(t))$ として t を連続的に変化させていくことで描くことができます。
 - － 速度： 曲線 $x = x(t)$ の点 $(t_1, x(t_1))$ における「接線の傾き」を $\frac{dx}{dt}(t_1)$ と書きます。この曲線上の各点にこれを対応させて、

$$\frac{dx}{dt}(t) \quad (2.1)$$

と書きましょう。物理的にはこれは（瞬間的な）物体の速度 v です。ただし、横軸に x 、縦軸に t をとる時空図では、接線の傾きの逆数になります。図2を参照して下さい。

- 慣性の法則
 - － 慣性の法則： 物体に力が働かないとき、静止している物体は静止し続け、運動している物体はそのまま等速直線運動する。
 - － 加速している電車の中など、慣性の法則が成り立たない系もあります。慣性の法則が成り立つ系（座標系）を慣性系といいます。例えば宇宙空間を浮遊している宇宙ステーションの静止系は慣性系です。

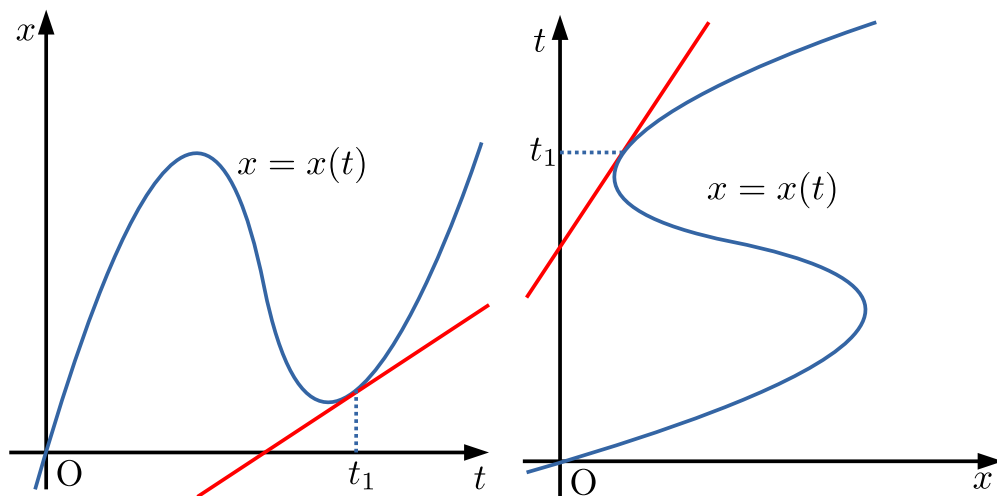


図2 物体の世界線 $x = x(t)$ 上の点 $(t_1, x(t_1))$ における接線の傾きを $\frac{dx}{dt}(t_1)$ と書きます。曲線 $x = x(t)$ 上の各点においてこれを定めることができるので、各 t に対して $\frac{dx}{dt}(t)$ と書きます。これを $x(t)$ の t による微分といいます。物理では、これは時刻 t における物体の(瞬間)速度 v です。ただし、横軸に x 、縦軸に t をとる時空図では接線の傾きの逆数になることに注意が必要です。

性系です。あるいは自由落下するエレベーターの静止系も慣性系です。

● 座標変換

- S を慣性系とします。 S に対して一定の速度 V で等速直線運動する系 S' を考えます。 S の座標 (t, x) と S' の座標 (t', x') の関係を座標変換といいます。
- 絶対時間: どの観測者に対しても同じ時間が流れていると仮定します。

$$t' = t \quad (2.2)$$

- ガリレイ変換:

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - Vt \end{cases} \quad (2.3)$$

$x' = 0$ の軌道は S では $x = Vt$ となります。これは t' 軸ですから、 t' 軸は xt 平面上では傾き $1/V$ の直線になります。一方 $t' = 0$ は $t = 0$ に一致します。これは x' 軸が x 軸に一致することを示しています。図3を参照して下さい。^{*1}

● 速度の変換則

S' 系での速度 v' を S 系の速度 v を使って表します。

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x - Vt) = \frac{dx}{dt} - V \quad (2.6)$$

^{*1} 距離のガリレイ不変性: 二つの事象 $A(t_A, x_A)$, $B(t_B, x_B)$ に対して、時間間隔 $\Delta t = t_B - t_A$ は明らかにガリレイ変換に対して不変です。なぜなら

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = t_B - t_A = \Delta t \quad (2.4)$$

だからです。もし2つの事象が同一時刻 ($t_A = t_B$) なら、空間的ユークリッド距離 $\ell_{AB} = |x_B - x_A| = |\Delta x|$ もガリレイ変換に対して不変です。ただし $\Delta x = x_B - x_A$ と書いています。実際、

$$\Delta x' = x'_B - x'_A = (x_B - Vt_B) - (x_A - Vt_A) = x_B - x_A - V(t_B - t_A) = \Delta x - V\Delta t \quad (2.5)$$

ですので、 $t_A = t_B$ のとき $\Delta x' = \Delta x$ が成り立ちます。一方、 $t_A \neq t_B$ で $V \neq 0$ の時は $\Delta x' \neq \Delta x$ です。すなわち、異なる時刻の2つの事象に対しては空間的ユークリッド距離はガリレイ変換に対して不変ではありません。

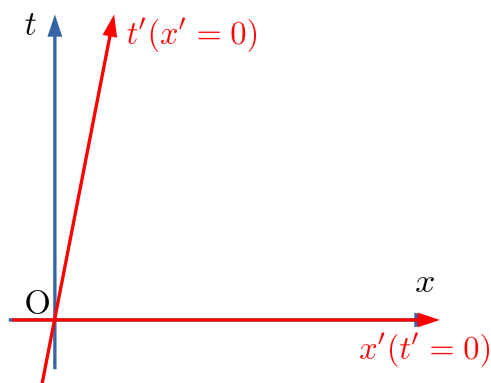


図3 ガリレイ変換では、 x 軸は不変で t 軸が傾く。

ですので、

$$v' = v - V \quad (2.7)$$

が得られます。これを速度の加法則といいます。^{*2}

3 特殊相対性原理

- 電磁気学とガリレイ変換の不整合：

- － 電磁気学は、電磁場の波つまり電磁波が一定の速さ $c \simeq 300000\text{km/s}$ で伝播することを理論的に示しました。電磁波とは光です。
- － 疑問：光の速さはどの慣性系に対する速さなのでしょう？ 光速が c で一定であるような慣性系を絶対静止系 S としましょう。図4を見て下さい。速度の加法則 (2.7) を認めると、絶対静止系に対して x 軸正の向きに速度 V で運動する慣性系 S' では、光の速さは x' 軸正の向きには $c - V$ になり、 x' 軸負の向きには $c + V$ になります。つまり光の進む向きによって速さが異なります。これはマイケルソン＝モーリーの実験結果に反します。さらに $V = c$ とすると、 x 軸正の向きに進む光は止まってしまいます。

- アインシュタインの提案：特殊相対性原理

^{*2} ニュートン力学では、ガリレイの相対性原理、すなわち、全ての慣性系で物理法則は同一であるという原理が成り立ちます。ニュートン力学における最も重要な法則は運動方程式です。慣性系において以下の運動方程式が成り立ちます。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \quad (2.8)$$

ここで m ：質量、 $\frac{dx}{dt}$ ：速度、 $\frac{d^2 x}{dt^2}$ ：加速度、 F ：力です。ガリレイ変換によって、 S' 系の加速度は

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - V \right) = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2.9)$$

と S 系の加速度を用いて表すことができます。すなわち加速度はガリレイ変換に対して不変です。 S は慣性系ですので運動方程式 (2.8) が成り立ちます。よって

$$m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = F \quad (2.10)$$

が成り立ちます。つまり、 S' 系でも質量を $m' = m$ 、力を $F' = F$ とすれば、運動方程式がそのまま成り立ちます。すなわち、慣性系に対して等速直線運動する系は慣性系であり、二つの慣性系の変換はガリレイ変換で表され、運動方程式はガリレイ変換に対して不変です。

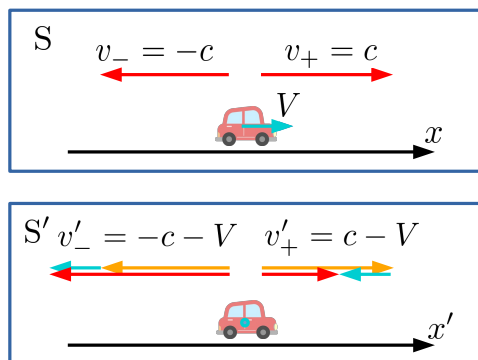


図 4 ガリレイ変換では光の速さが向きに依存してしまいます。

1. 全ての慣性系で（電磁気学を含む）物理法則は同一である。
2. 全ての慣性系で真空中の光速は同一である。（光速不変の原理）

4 特殊相対論とその帰結

光速が二つの慣性系 S と S' で同一とはどういうことでしょうか？

- 世界間隔

2つの事象 A, B の S 系での座標を $A(t_A, x_A), B(t_B, x_B)$ とします。 $\Delta t = t_B - t_A, \Delta x = x_B - x_A$ とした時、

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 \quad (4.1)$$

を A と B の世界間隔といいます。^{*3} S' 系でも $A(t'_A, x'_A), B(t'_B, x'_B)$ とし、 $\Delta t' = t'_B - t'_A, \Delta x' = x'_B - x'_A$ とおいて、 A と B の世界間隔を

$$\Delta s'^2 = -c^2 \Delta t'^2 + \Delta x'^2 \quad (4.2)$$

と定義します。

- 光速不変の原理

図 5 のように、 S 系で事象 A から出た光が事象 B に達したとします。 S 系で光速が c であることから、

$$\left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| = c \quad (4.3)$$

です。したがって、

$$\Delta s^2 = 0 \quad (4.4)$$

です。 S' 系でも光速が c であることから、同様に

$$\Delta s'^2 = 0 \quad (4.5)$$

が言えます。

^{*3} Δs^2 は Δs という物理量の 2 乗ではなく、単なる記号だと考えるべきです。なぜなら Δs^2 は負になることもあるからです。

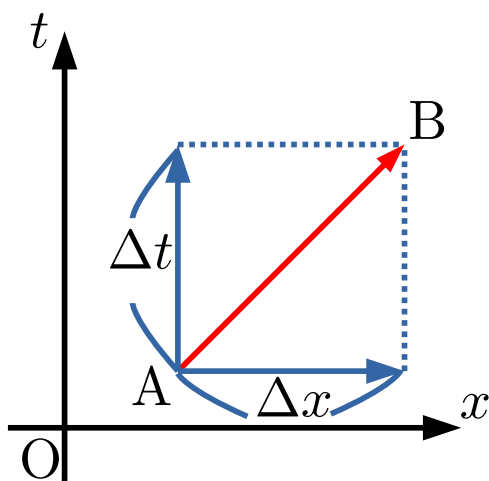


図5 S系における光の経路は $\Delta x = \pm ct$ で決まります。

- 世界間隔を不変にする変換は光速を不変に保つ

一般の2つの事象間の世界間隔を考えましょう。SとS'の間の座標変換として $\Delta s^2 = \Delta s'^2$ となるような変換を考えれば、その変換に対して光速は不変になります。なぜならその場合には $\Delta s^2 = 0$ ならば $\Delta s'^2 = 0$ が成り立つからです。

5 ローレンツ変換

- ローレンツ変換の導出

$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = a_{10}t + a_{11}x \end{cases} \quad (5.1)$$

という一次変換を考えます。 $a_{00} > 0$, $a_{11} > 0$ としましょう。S'がSに対して一定の速度 V で動いているとすると、 $x' = 0$ のS系でみた軌跡は $x = Vt$ となります。従って式(5.1)から

$$a_{10} + a_{11}V = 0 \quad (5.2)$$

でなければならないことがわかります。また

$$\begin{cases} \Delta t' = a_{00}\Delta t + a_{01}\Delta x \\ \Delta x' = a_{10}\Delta t + a_{11}\Delta x \end{cases} \quad (5.3)$$

です。ここで $\Delta s^2 = \Delta s'^2$ であることを要請すると、

$$-c^2(a_{00}\Delta t + a_{01}\Delta x)^2 + (a_{10}\Delta t + a_{11}\Delta x)^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 \quad (5.4)$$

が成り立たなければなりません。両辺で、 Δt^2 , $\Delta t\Delta x$, Δx^2 の係数を比較することによって関係式が3つ得られます。従って、式(5.2)とこれらをまとめて、連立方程式

$$\begin{cases} a_{10} + a_{11}V = 0 \\ -c^2a_{00}^2 + a_{10}^2 = -c^2 \\ -2c^2a_{00}a_{01} + 2a_{10}a_{11} = 0 \\ -c^2a_{01}^2 + a_{11}^2 = 1 \end{cases} \quad (5.5)$$

が成り立ちます。これは未知数が a_{00} , a_{01} , a_{10} , a_{11} の 4 つで 4 本の連立方程式なので、一般に解けます。straightforward ですがやや長い計算のあとで

$$a_{00} = a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad a_{01} = -\frac{V}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad a_{10} = -\frac{V}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \quad (5.6)$$

と求まります。これを (5.1) に代入すると、この変換は

$$\begin{cases} t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \\ x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} (-Vt + x) \end{cases} \quad (5.7)$$

と定まります。この変換をローレンツ変換（より正確にはローレンツブースト）といいます。この変換で x 軸 t 軸と x' 軸 t' 軸の関係を図示したものが図 6 です。この図からわかるように、 t' 軸だけでなく x' 軸も xt 平面上で同じ角度だけ傾きます。これは $t = \text{一定面}$ と $t' = \text{一定面}$ が異なることを表しています。つまり、S 系と S' 系で同時刻面が異なります。

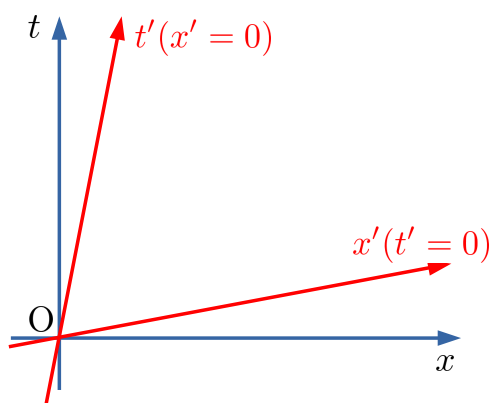


図 6 ローレンツ変換（ローレンツブースト）では x 軸も t 軸も同じ角度だけ内向きに傾むく。

● 光速不変の原理の帰結

- ローレンツ変換では世界間隔が不変に保たれます。
- ガリレイ変換は打ち捨てられます。特に絶対時間は存在しません。
- 時間と空間は対等に扱われます。^{*4}
- S 系での同時刻面 ($t = \text{一定}$) は S' 系での同時刻面 ($t' = \text{一定}$) とは異なります。
- ここまで x 軸上の事象と運動しか考えなかったのですが、 y 軸、 z 軸を加えても本質的には同じです。^{*5}

^{*4} $ct = x^0$, $x = x^1$, $V/c = \beta$ とおくと

$$\begin{cases} x'^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (-\beta x^0 + x^1) \end{cases} \quad (5.8)$$

となります。この式は x^0 と x^1 および x'^0 と x'^1 をともに入れ替えると同じ式になります。つまり、 x^0 と x^1 は全く対等に変換されます。

^{*5} Δs^2 を不変にする連続的な一次変換は、 x 軸方向、 y 軸方向、 z 軸方向のブーストの他に、 xy 平面上、 yz 平面上、 zx 平面上の空

6 時間の遅れ

6.1 直接導く方法

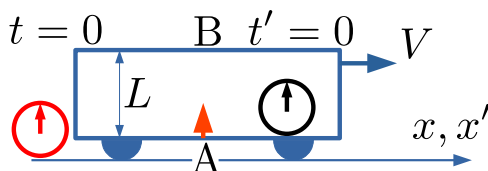


図 7 一定の速さで x 軸方向正の向きに直線的に走る電車の中で鉛直方向に光を往復させる。地上に静止した時計 (t) と電車に静止した時計 (t') の時刻を合わせておいて、時刻 $t = t' = 0$ に光を床の点 A から上方に射出する。

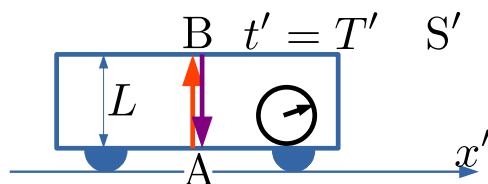


図 8 電車静止系 S' で見ると、光は A から射出され天井の点 B で反射され再び A に達する。

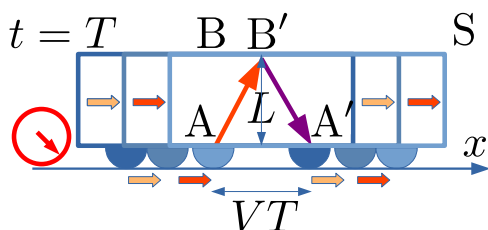


図 9 地上静止系 S で見ると、光は A から射出され天井の点 B' で反射され床の点 A' に達する。

図 7 のように、地上に静止している観測者 O に対して x 軸方向に一定の速さ V で走行する電車があるとします。その中に鉛直方向 (y 軸方向) に光を長さ L だけ往復するように電車の床と天井に鏡を置きます。床から測った天井の高さを L とします。電車の中で静止している観測者を O' とします。地上に静止している慣性系を S 系、電車に対して静止している観測者を S' 系としましょう。 O と O' は時計を合わせて、時刻 $t = t' = 0$ に光が床から離れるとします。

まず S' 系で考えましょう。図 8 を見てください。光が距離 L を往復して床に戻る時刻を $t' = T'$ とします。光速不変の原理により S' 系での光速は c ですので、

$$T' = \frac{2L}{c} \quad (6.1)$$

間回転があり、一般にはこれら 6 つの独立な変換の合成からなります。その全体は群をなし、固有ローレンツ群といいます。その元を固有ローレンツ変換といいます。

と計算できます。

つぎに S 系で考えましょう。図 9 を見て下さい。光が床の点 A を離れ天井の点 B' で反射されて再び床にたどり着いた点を A' とし、A' に達した時刻を $t = T$ とすると、この間に電車は VT だけ進んでいますから $AA' = VT$ です。この間に光が進む経路 $AB'A'$ と線分 AA' は、底面 VT で高さが L の二等辺三角形をなします。

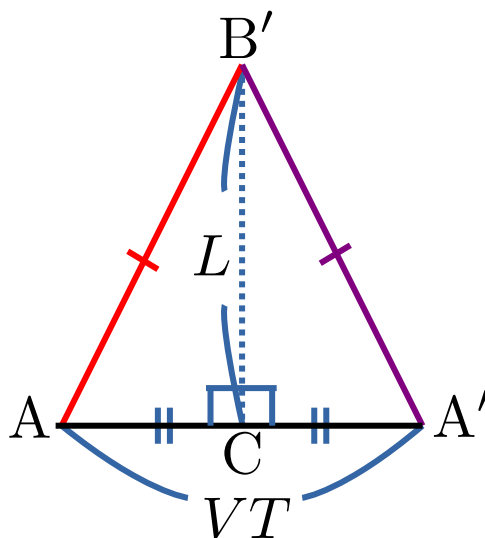


図 10 二等辺三角形

図 10 を見て下さい。二等辺三角形の底辺 AA' の中点を C とすると、 $\overline{AB'} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{CA'}$ です。従って、 $\triangle AB'C$ と $\triangle A'B'C$ は三辺の長さがそれぞれ等しいので合同です。よって $\angle ACB' = \angle A'CB'$ です。一方、 $\angle ACB' + \angle A'CB' = 180^\circ$ ですから、 $\angle ACB' = \angle A'CB' = 90^\circ$ です。よって、 $\triangle AB'C$ と $\triangle A'B'C$ は合同な直角三角形です。 $\triangle AB'C$ に注目すると、三平方の定理から

$$\overline{AB'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{B'C}^2 \quad (6.2)$$

です。ここで、 $\overline{B'C} = L$, $\overline{AC} = \frac{VT}{2}$ ですから、

$$\overline{AB'} = \sqrt{L^2 + \left(\frac{VT}{2}\right)^2} \quad (6.3)$$

です。 $\overline{A'B'}$ も同じ長さです。

光速不変の原理より S 系でも光速は同じ c ですから、光が経路 $AB'A'$ を通る時間 T は

$$T = \frac{2\sqrt{L^2 + \left(\frac{VT}{2}\right)^2}}{c} \quad (6.4)$$

です。この式を T について解くと、

$$T = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} \quad (6.5)$$

が得られます。

従って、

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \quad (6.6)$$

が得られます。つまり、観測者 O と O' が光を床から発するときに時計を 0 に合わせたとすると、光が往復して再び床に戻ってくる間に、 O' の時計は T' であるのに O の時計は T になっていて、 $T' < T$ です。これは、 S 系から見ると S' 系では時間の進み方が遅くなっていることを意味しています。

6.2 ローレンツ変換から導く

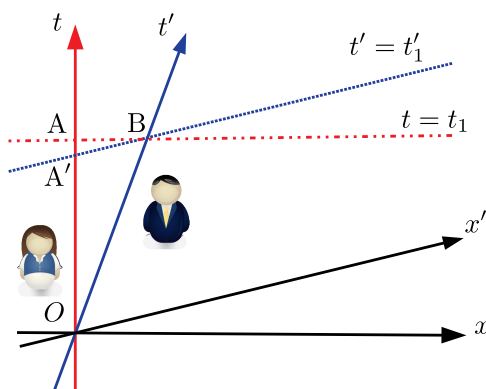


図 11 時間の遅れを示す概念図

● 状況設定

図 11 を見て下さい。以下のような状況設定を考えます。

- 花子さん: S 系で $x = 0$ に静止しています。時計の読みは t です。
- 太郎さん: S' 系で $x' = 0$ に静止しています。時計の読みは t' です。
- $t = t' = 0$ に花子さんと太郎さんは会いました。これを事象 O とします。

花子さんが $t = t_1$ のときを事象 A とします。花子さんにとって事象 A と同時刻には太郎君は事象 B にいるとします。事象 B の座標を S 系で $(t, x) = (t_1, x_1)$ および S' 系で $(t', x') = (t'_1, 0)$ としましょう。

● 2 直線の交点の S' 系での座標を求めます。

式 (5.7) の第二式に $x' = 0$ を代入すると $t = \frac{1}{V}x$ が得られます。これが直線 OB の方程式です。これと直線 AB の方程式 $t = t_1$ を連立させると、事象 B の S 系での空間座標が $x_1 = Vt_1$ と得られます。これを式 (5.7) の第一式に代入して、事象 B の S' 系での時間座標 $t' = t'_1$ が

$$t'_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} t_1 \quad (6.7)$$

と求まります。

● 帰結

S' 系で静止している太郎君の時計の読み t'_1 を S 系の花子さんは花子さんの時計の読み t_1 よりも $\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$ 倍遅く進んでいると観測します。

6.3 時間の遅れの練習問題



図 12 宇宙船ジェミニ 6 号

- 図 12 ような宇宙船を考えましょう。仮に地球に対して光速の 80% の速さで航行する宇宙船を考えると、宇宙船静止系での時間は (6.6) あるいは (6.7) より

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \quad (6.8)$$

ですから、地球と比べて 60% しか進みません。つまり地球で 100 分経つ間に宇宙船では 60 分しか経ちません。これは未来に行けるタイムマシンとも言えます。学術用語とは言えませんが、「浦島効果」と言われることもあります。

- 実際の宇宙船は今の所こんな高速は出せませんが、飛行機でも新幹線でも自転車でもこのような効果はわずかながらあります。

7 まとめ

次のような事項について学びました。

- 3 次元空間から 4 次元時空へ。
- 相対論以前：絶対時間とガリレイ変換。
- 特殊相対性原理：すべての慣性系において光速が一定。
- 特殊相対論の帰結：世界間隔の不変性。ローレンツ変換。時間と空間の対等性。同時刻の相対性。
- 時間の遅れ。