「自然科学の探究」
時空観の変遷

原田知広

立教大学理学部

2025 年度春学期 @ 立教大学

今日の目標

1. ４次元時空を理解する
2. ローレンツ変換を理解する
3. 時間の遅れを理解する

前提

- 中学校の数学と理科

Outline

4次元時空

- 次元・空間・時空
  - 黒板の上は座標 (x, y) で点を指定。２次元空間。
  - 我々の空間では座標 (x, y, z) で点を指定。３次元空間。
  - 人と会うには時刻も。事象 (t, x, y, z)。４次元時空。
  - 運動する物体の経路は $(t, x(t), y(t), z(t))$ と４次元時空内に曲線を描く。これをこの物体の世界線という。

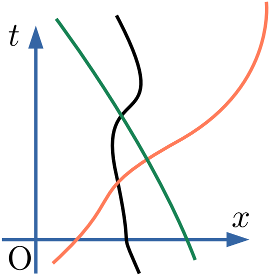


Figure: 時空図と３本の世界線

Outline

世界線と微分と速度

- 世界線: $x = x(t)$、微分と速度: $v = v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$

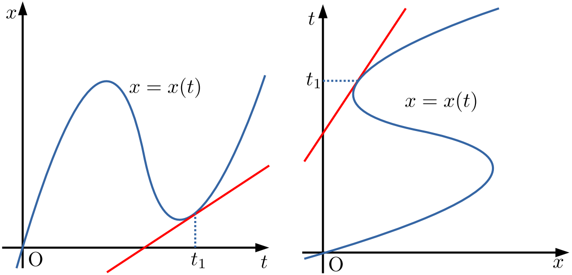


Figure: 物体の世界線 $x = x(t)$ 上の各点 $(t, x(t))$ における接線の傾きを $\frac{dx}{dt}(t)$ と書く。これを $x(t)$ の t による微分という。これは時刻 t における物体の（瞬間）速度 v である。ただし、横軸に x、縦軸に t をとる時空図では接線の傾きの逆数になることに注意。

ガリレイ：慣性の法則

慣性の法則

物体に力が働かないとき、静止している物体は静止し続け、運動している物体はそのまま等速直線運動する。

- 加速中の電車の中などでは慣性の法則が成り立たない系（座標系）もある。
- 慣性の法則が成り立つ系=慣性系。

ガリレイ変換

- **２つの慣性系間の変換**
  - S を慣性系とする。S に対して一定の速度 V で等速直線運動する系 S′ を考える。
  - 絶対時間: どの観測者にも同じ時間が流れている。

$$t' = t$$

  - $x' = 0$ は $x = Vt$ に変換されるべき。

ガリレイ変換

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - Vt \end{cases}$$

ガリレイ変換における座標軸

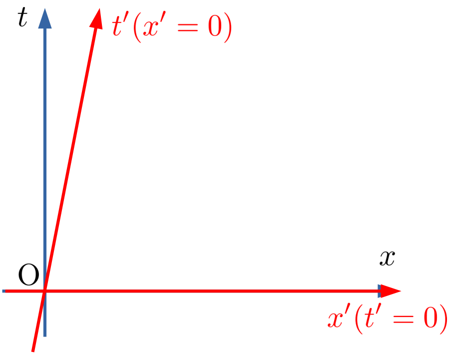


Figure: ガリレイ変換における座標軸の関係

- t' 軸と x' 軸を xt 平面に描く。
  - t' 軸：$x' = 0$ だが、これは $x = Vt$ になる。
  - x' 軸：$t' = 0$ だが、これは $t = 0$ になる。

速度の変換則

- S′ 系での速度 v' を S 系の速度 v を使って表す。

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x - Vt) = \frac{dx}{dt} - V$$

速度の加法則

$$v' = v - V$$

Outline

光の速さ

- 電磁気学: 光は光速 c = 秒速 30 万 km で伝播する。
- 疑問: 速度の加法則を光速に適用すると…

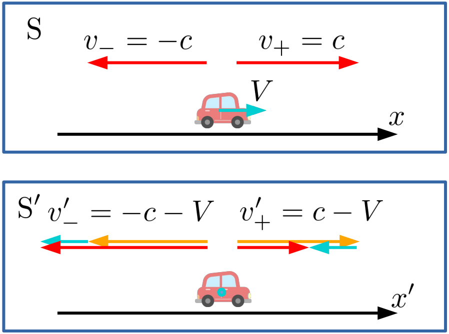


Figure: 光速が光の進む向きに依存してしまう。

- 実験によれば光速は光の向きに依存しない。我々は「絶対静止系」にいるのだろうか？

特殊相対性原理

- アインシュタインの提案

特殊相対性原理

- 全ての慣性系で物理法則は同一である。
- 全ての慣性系で真空中の光速は同一である。（光速度不変の原理）

- つまり「絶対静止系」などなく、無数にある慣性系の関係はすべて「相対的」なものである。→「相対性」理論の言葉の由来。

Outline

時空における新しい距離

- 世界間隔
２つの事象 A,B の S 系での A, B の座標を (t_A, x_A), (t_B, x_B) とする。$\Delta t = t_B - t_A$, $\Delta x = x_B - x_A$ とする。

世界間隔

$$\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2$$

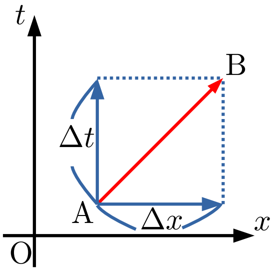
- S′ 系でも $\Delta t' = t'_B - t'_A$, $\Delta x' = x'_B - x'_A$ として、

$$\Delta s'^2 = -c^2\Delta t'^2 + \Delta x'^2$$

と書く。

光の経路と世界間隔

- 事象 A から出た光が事象 B に達したとする。



- S 系で光速が c であることから、

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| = c \Leftrightarrow \Delta s^2 = 0.$$

- S′ 系でも光速が c なら同様に $\Delta s'^2 = 0$ が言える。

世界間隔を不変にする変換

- 一般の２つの事象 A,B 間の世界間隔を考えよう。
- S と S′ の間の座標変換として $\Delta s^2 = \Delta s'^2$ となるような座標変換を考える。
- この場合、S でも S′ でも光速は c で一定である。

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| = c \Leftrightarrow \Delta s^2 = 0 \Leftrightarrow \Delta s'^2 = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right| = c$$

Outline

一次変換

- 定数 $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}$ を用いて

$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = a_{10}t + a_{11}x \end{cases}$$

  と書けるとする。
- $a_{00} > 0,\ a_{11} > 0$ を仮定する。（時間反転や空間反転は考えない。）

変換に対する要請

- S′ 系と S 系の相対速度が V
  - S′ 系の静止点 $x' = 0$ を S 系でみたときの軌跡は $x = Vt$ となる。
- 世界間隔 Δs^2 の不変性
  - $\Delta t = t_B - t_A$, $\Delta x = x_B - x_A$ とすると、

$$\begin{cases} \Delta t' = a_{00}\Delta t + a_{01}\Delta x \\ \Delta x' = a_{10}\Delta t + a_{11}\Delta x \end{cases}.$$

  - ここで $\Delta s^2 = \Delta s'^2$ であることを要請すると、任意の $\Delta t, \Delta x$ について以下が成り立たなければならない。

$$-c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 = -c^2(a_{00}\Delta t + a_{01}\Delta x)^2 + (a_{10}\Delta t + a_{11}\Delta x)^2$$

- これらから、未知数 $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}$ に対する４本の連立方程式が得られる。これを解くと未知数が求まり、S 系から S′ 系への１次変換が決まる。

ローレンツ変換

ローレンツ変換

$$
\begin{cases}
t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right) \\
x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}(-Vt + x)
\end{cases}
$$

- より正確には x 軸方向のローレンツブーストという。

ローレンツ変換における座標軸

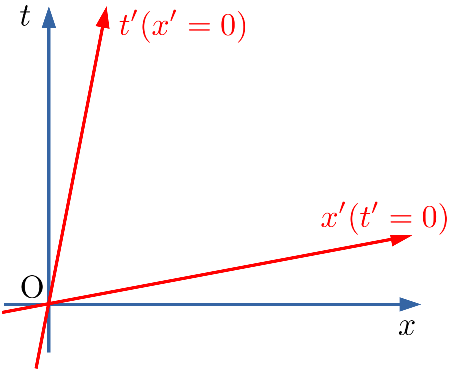


Figure: ローレンツブーストにおける座標軸の関係

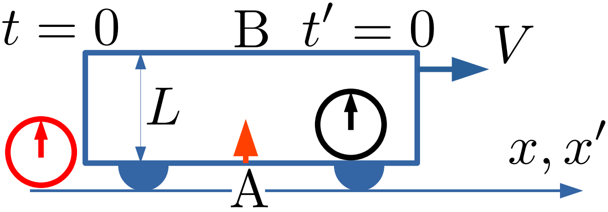
- t' 軸と x' 軸を xt 平面に描く。
  - t' 軸: $x' = 0$ だが、これは $t = \frac{1}{V}x$ になる。
  - x' 軸: $t' = 0$ だが、これは $t = \frac{V}{c^2}x$ になる。

光速度不変の原理の帰結

- ローレンツ変換では世界間隔が不変に保たれる。
- ガリレイ変換は打ち捨てられる。
- 絶対時間は存在しない。
- 時間と空間は対等に扱われる。
- S 系の同時刻面 (t = 一定) は S′ 系の同時刻面 (t' = 一定) とは異なる。
- ここまで x 軸上の事象しか考えなかったが、y 軸、z 軸を加えても本質的には同じである。

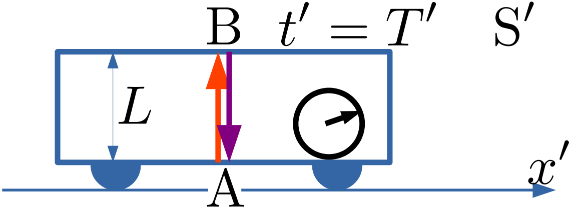
Outline

電車内で光を一往復させる



- 地上に対して一定の速度 V で走る電車内で光を鉛直方向に一往復させる。
- 地上静止系を S 系、電車静止系を S′ 系とする。
- S 系と S′ 系の時計を時刻合わせをして、$t = t' = 0$ で A から光を上方に射出する。
- B には鏡を設置しておく。

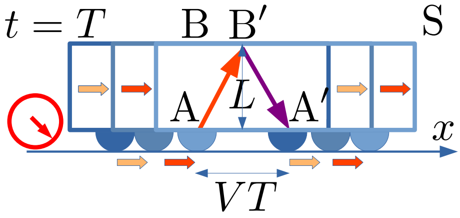
電車静止系 S′ 系で往復時間を測る



- 光が距離 L を往復して床に戻る時刻を $t' = T'$ とする。S′ 系での光速は c だから、

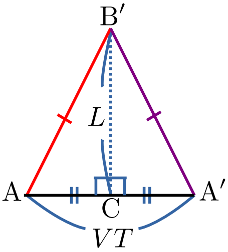
$$T' = \frac{2L}{c}.$$

地上静止系 S 系では光は斜めに進む



- 光が床の点 A を離れ天井の点 B′ で反射されて再び床にたどり着いた点を A′ とする。光が A′ に達した時刻を $t = T$ とすると、この時間の間に電車は VT だけ進んでいるから $\overline{\mathrm{AA'}} = VT$ である。

二等辺三角形の斜辺の長さ



- $\triangle \mathrm{AB'A'}$ は、底面 VT で高さが L の二等辺三角形。
- 線分 AA′ の中点を C とすると、$\triangle \mathrm{AB'C}$ と $\triangle \mathrm{A'B'C}$ の合同から、$\angle \mathrm{ACB'} = \angle \mathrm{A'CB'} = 90°$。よって、三平方の定理から

$$\overline{\mathrm{AB'}}^2 = L^2 + \left(\frac{VT}{2}\right)^2.$$

地上静止系Ｓで往復時間を測る

- 光の経路 $\mathrm{AB'A'}$ の長さは

$$2\overline{\mathrm{AB'}} = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{VT}{2}\right)^2}.$$

- 光が経路 $\mathrm{AB'A'}$ を通る時間 T は

$$T = \frac{2\sqrt{L^2 + \left(\frac{VT}{2}\right)^2}}{c}$$

を満たす。この式を T について解くと以下になる。

$$T = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

時間の遅れの導出

- よって、S′ 系と S 系での往復時間は

$$T' = \frac{2L}{c}, \quad T = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

  と求まった。これより

$$\frac{T'}{T} = \frac{\sqrt{c^2 - V^2}}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \leqq 1$$

- 同じ現象の所要時間が電車静止系では T' であり地上静止系では T である。$T' < T$ だから、地上静止系より電車静止系の時間の進みが遅い。

時間の遅れの練習問題

- 光速の 80% の速さで航行する宇宙船を考える。

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

であるから、時間は地球の 60% しか進まない。
地球で 100 分経つ間に宇宙船では 60 分しか経たない。「浦島効果」。未来行きタイムマシン？

- 飛行機でも新幹線でもこの効果はわずかにある。

Outline

まとめとリアクションペーパー

- まとめ
  - ３次元空間→４次元時空
  - 相対論以前は、絶対時間＋ガリレイ変換。
  - 特殊相対性原理: 全ての慣性系において光速度一定。
  - 世界間隔の不変性。ローレンツ変換。
  - 同時刻の相対性。時間の遅れ。

- リアクションペーパーに書いて提出して下さい。
  1. 本日の授業で出てきた式一つとその説明
  2. 本日の授業に関する質問があればその質問

Outline

花子と太郎

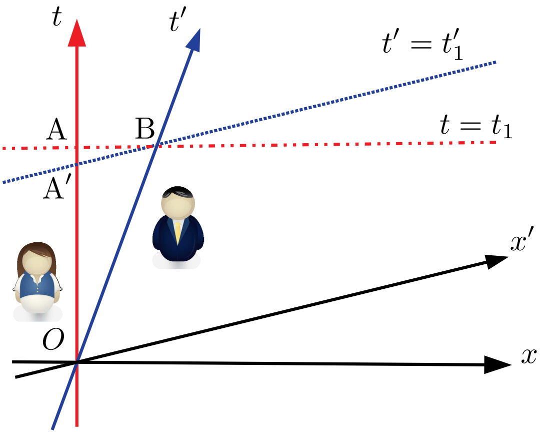


Figure: **時間の遅れを示す概念図**

花子は速度 V で運動する太郎を観測する

状況設定

- 初期設定
  - 花子: S 系で $x = 0$ に静止。時計の読みは t。
  - 太郎: S′ 系で $x' = 0$ に静止。時計の読みは t'。
  - $t = t' = 0$ に $x = x' = 0$ で二人は会った（事象 O）。
- 花子が自分と同時刻の太郎の時計を観測する。
  - 花子が $t = t_1$ のときを事象 A とする。
  - 花子にとって事象 A と同時刻には太郎は事象 B。
  - 事象 B の座標を S 系で $(t, x) = (t_1, x_1)$ および S′ 系で $(t', x') = (t'_1, 0)$ としよう。

時間の遅れの導出

- 事象 B の S′ 系での時間座標 t'_1 を t_1 で表す。
  - 事象 B の座標を S 系で求める。
    直線 OB$t = \frac{1}{V}x$ と直線 AB$t = t_1$ の交点 B の S 系での x 座標は $x_1 = Vt_1$。
  - S′ 系にローレンツ変換する。
    事象 B の S 系での座標 $(t, x) = (t_1, Vt_1)$ をローレンツ変換の式に代入すると、事象 B の S′ 系での t' 座標 t'_1 が

$$t'_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}\, t_1$$

と求まる。

時間の遅れ

時間の遅れの式

$$t'_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}\, t_1$$

- 太郎の時計の読み t'_1 は花子の時計の読み t_1 の $\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$ 倍である。この因子は 1 以下。