「自然科学の探究」『時空観の変遷』
Q & A

原田知広 *

2025 年 4 月 28 日

概要

これは、これまで「自然科学の探究」という立教大学全学共通科目の一回分の『時空観の変遷』というテーマの講義を受け持った際に学生の皆さんからいただいた質問を元に書いた Q & A 集です。貴重な質問してくださった皆さんに感謝します。

目次

* 立教大学理学部: harada@rikkyo.ac.jp

1　一般的な質問

Q. 理論について研究している研究室ではどのようなことをしているのですか？

A. そうですね。「理論について」研究しているというのは、そういう部分もあるのですが、全体としてはちょっと違うと思います。物理学を研究するために、理論を作ったり、理論を使ったり、その理論の性質を調べたり、理論の帰結を導いたりしています。また観測や実験と理論を比較して制限したり、観測や実験を行なって物理学のことがわかるような理論を作ったりすることもあります。

Q. 物理が苦手です。克服する方法やわかりやすい本などがあれば教えて下さい。

A. 難しい質問です。私はみなさんが物理で苦しんで欲しいとは思っていません。物理学というのは人類が生き残る上でどうしても必要な知識とは言えないかもしれません。例えば人類は地球が球形であるという事実を知らずに今から数千年前まで生き残れたわけです。だから現代の我々も物理学を知らずに生きていけるかもしれません。でももし地球が球形であるならそのことを知りたいと思いませんか？それは、音楽や哲学や文学や芸術や社会学や心理学と同じように人間がより良く生きることにつながると思います。そう思える人は、易しい本でいいので、マンガでもいいので、読みやすい本、読みたい本、あるいはアニメや映画でもいいので、物理学に親しんでもらえれば幸いです。

Q. 動いていなくても位置が違うと時間が違うということで合っていますか？やっぱり途中の計算が面白くないなと思いました。理論研はずっとこんな感じなんだろうなと思うと先が思いやられます。

A. 「動いていなくても位置が違うと時間が違うということで合っていますか？」というのは質問が漠然としすぎていて答えられません。それから、理論物理学では計算はどうしても必要になってきます。新しい理論を生み出すものは物理的直感と数学だけがよりどころと言えるでしょう。その後、観測や実験結果との整合性を考えます。計算は慣れてくれば熟練してきます。また物理的直感も物理学を学べば徐々に育ってきます。物理学を理解していない直感はあてになりません。

Q. 担当者の専門は？物理に対する考え方は？

A. 専門は一般相対論です。物理に対する考え方は一言では言えませんが、少なくとも式が理解できなければ物理を理解することはできないと考えています。

Q. 相対論は世の中にどのような影響を与えたのか？ガリレイ変換が現代社会にどのような影響を及ぼすか？

A. この内容は物理学でも自然科学でもありません。一物理学者である私が人に教えられるほど知っている

ことはありません。あしからずご了承ください。科学史という物理学とは別の分野の学問で扱われるべき内容です。

2　数学について

Q.　$\frac{dx}{dt}$ の d は何ですか。

A.　これはそういう記号というしかないのですが、x の t による微分を $\frac{dx}{dt}$ と書くということです。でも気持ちとしては、離れている二点の x 座標の差 Δx と t 座標の差 Δt の比 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ をとって、2 点間を世界線に沿って近づけていったときに、Δx と Δt が微小量 dx と dt になっていくということを表しています。

Q.　xt 平面での微分的な考えは車のメーターのようなことと同じようなことをしているという考えで合っていますか？

A.　そうですね。それでいいと思います。

Q.　微分ですが次のように d を約分することはできますか？

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x}{t^2} \tag{2.1}$$

A.　残念ですができません。この dx は d と x の掛け算ではないからです。いま 2 つの t と $t+h$ に対する x の値 $x(t)$ と $x(t+h)$ に対して、

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{(t+h)-t} \tag{2.2}$$

という量を考えます。これは x の平均的な変化率です。ここで h が非常に小さい極限を考えたときに、これを $x(t)$ の微分と言って、$\frac{dx}{dt}(t)$ という記号を使って表すということです。また $\frac{dx}{dt}$ は t の関数なので、これに対して同じ操作をすることができます。つまり、

$$\frac{\frac{dx}{dt}(t+h)-\frac{dx}{dt}(t)}{(t+h)-t} \tag{2.3}$$

を作って、h を非常に小さくする極限をとるということです。このとき、これを $x(t)$ の二階微分といって $\frac{d^2x}{dt^2}(t)$ という記号を使って表します。このように d というのは微分という操作に対する記号なので、約分をすることはできません。

Q.　加速度はどうして $\frac{d^2x}{dt^2}$ と分母が 2 乗になるのですか？

A.　加速度は $x(t)$ を t で二回微分したものなので、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) \tag{2.4}$$

と書かれるべきものですが、これを

$$\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.5}$$

と書くという約束です。

Q. Δとは何を表すのですか？

A. これは数学でよく使われる記号です。例えば、2つの点の x 座標 x_2 と x_1 の差を $\Delta x = x_2 - x_1$ と書いたりします。

3 空間・時空について

Q. なぜ時空図のグラフでは時間と x 軸方向の位置の２つの次元しか説明できないのですか？それともあの x は x 軸方向の座標ではない別のものを指したのですか？４次元時空を４つの座標軸を用いて xz グラフのように表すことはできるのですか？

A. なかなか鋭い質問ですね。本当は時空図は４次元時空を図に書いたものなので、時間 t と空間 x, y, z の４つの軸をもつグラフを書きたいのです。書きたいのですが、黒板には正しく書けないのです。それは黒板がもともと２次元の面だからです。それで空間座標の３つの軸 x, y, z 軸を x 軸で代表させて、x 軸と t 軸だけ書いて、xt 平面を黒板に書いて時空図とよんでいました。２次元面に立体を書くことは工夫をすれば可能なので、見る人の想像力も借りると空間座標のうちの２つの軸 x, y 軸と時間軸 t 軸を書いた時空図を書くことは可能です。黒板に t, x, y, z 軸全部書くこともできるのですが、これが４次元空間に見えるほど想像力のある人はあまりいないと思います。

Q. なぜ２次元「空間」といって２次元「平面」とは言わないのでしょうか？

A. ２次元「平面」という言葉には、空間が２次元でありしかもたいらであるという情報が加わっています。たいらであるということは曲がっていないということですね。それは空間が２次元であるということとは独立な情報なのでそうは言わなかったということです。２次元空間には２次元平面もあれば２次元曲面もあるからです。

Q. ４次元の座標を考えるとき、４つの方向全てがそれぞれ垂直になっていないといけないのではないか？

A. 非常に良い質問です。答はイエスでもありノーでもあります。ローレンツ変換では図１で見るように、最初の x 軸と t 軸は互いに直交しています。この図では、x' 軸と t' 軸は xt 平面上で傾いているので、x' 軸と t' 軸は直交していないように見えます。しかし、世界間隔に対応する内積[*1]では実はこの２つの軸も互いに直交しています。このように普通特殊相対論では基本的にはデカルト座標（直交座標）を採用します。なので答はイエスです。しかし本来座標というのは人間が勝手に決めてよいものであって、４つの数字で事象を一つに特定できさえすれば何でも良いはずです。ですので答はノーでもあります。デカルト座標に限らない一般座標における物理学の不変性を一般共変性といいます。一般相対論などのより高度な物理学では一般共変性が明確な形式で記述されます。

[*1] より正確にはミンコフスキー時空における内積を指す。

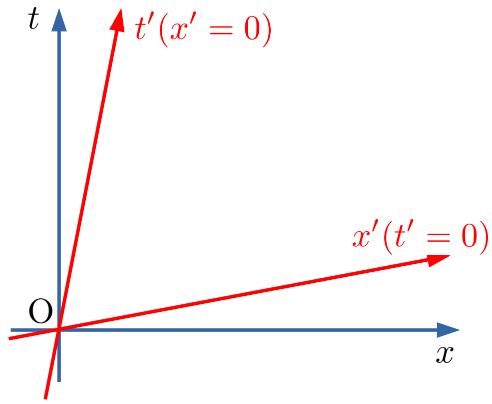

図１　ローレンツ変換（ローレンツブースト）では x 軸も t 軸も同じ角度だけ内向きに傾く。

Q.　３次元空間や４次元時空があるのならば、５次元や６次元もあるのでしょうか？あるとしたら何が加わるのでしょうか？

A.　これも良い質問です。でも答えはまだ誰も知りません。物理学者の中にはわれわれの時空は１１次元であると考えている人が大勢います。またわれわれの時空は５次元であってもうひとつの次元は質量であると考えた物理学者もいます。一方、数学的には５次元時空も６次元時空も考えることは可能です。

Q.　宇宙全体で慣性系において物理法則が同一なのであれば、５次元などの空間は生まれないはずと思いました。

A.　４次元から５次元が生まれるということはないでしょうが、我々の宇宙が５次元以上の時空であって特殊相対論が成り立っている可能性はあります。我々は何らかの理由で４次元までしか認識できていないという可能性です。

Q.　時間が絡むグラフを書くとき、数学では時間を横軸にとることが多いと感じます。しかし、今日の授業では時間を縦軸にとっていました。これには何か理由があるのでしょうか？

A.　そうですね。私もよくわかりません。実は物理学でも普通は時間軸を横軸にとることが多いと思います。時間を縦軸にとるのは時空図を書くときの慣習です。以下は私の推測です。時空図の場合には、時間１次元に対して空間は３次元だったりすることが想定されます。そのような場合、実際には書くことが難しいので、空間を２次元にしてしまって、時空を３次元にするとぎりぎり想像できるし、黒板にもなんとか書くことができます。しかし、時空とはいえ、時間と空間ではやはり時間は区別したいことが多いです。その場合、空間２次元と時間１次元を区別するために、空間２次元は水平面にとり時間１次元は鉛直上向きにとると、なんとなく時間は特別な方向という感じが出るのかなと思います。その感覚で、空間を１次元にしてしまったときも、空間を横軸にして時間を縦軸にする慣習が成立したと推測します。

4　ガリレイ変換について

Q.　ガリレイ変換は $t = t'$ なのに、なぜ t' 軸は斜めの直線なのか？

A.　まず第一に、非常に誤解しやすいのですが、t 軸や t' 軸を決めているのは、t や t' そのものではなくて、$x = 0$ の直線と $x' = 0$ の直線なのです。なので、$t = t'$ であることは t 軸と t' 軸が一致することを意味しないのです。実際、ガリレイ変換の式

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - Vt \end{cases} \tag{4.1}$$

の第二式において $x' = 0$ とすると、$x = Vt$ が得られます。これは $t = (1/V)x$ と書き直せますから、これは t' 軸が xt 平面上では傾き $1/V$ の直線になることを示しています。これをプロットしているのが図 2 です。一方、第一式で $t' = 0$ とすると $t = 0$ が得られます。これは x' 軸が x 軸に一致するということです。つまり、$t = t'$ であることはむしろ x 軸と x' 軸が一致することを意味しているのです。

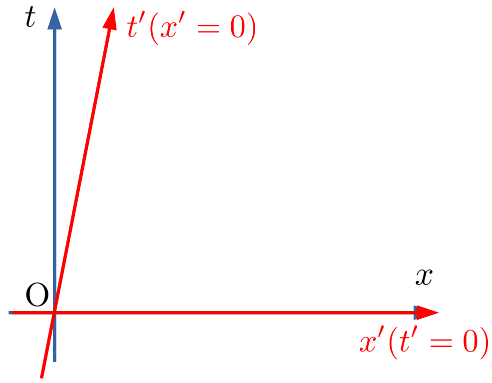

図 2　ガリレイ変換では t 軸だけが傾く。x 軸は不変に保たれる。

Q.　$x' = 0$ のとき $x = Vt$ ということでしたが、$x' = 0$ つまり観測者 S$'$ がずっと同じ位置から動かずに別の運動する物体を観測しているということでしょうか？そうであれば、ただ動いている物体の速度を求めるような問題でも、状況で言えば、$x' = 0$ のときと同じことであるということでしょうか？

A.　質問の意味が完全にはわかりませんが、$x' = 0$ というのは S$'$ 系で静止しています。しかし、S 系では一定の速度 V で x 軸正の方向に運動しています。ですので、S 系から見て一定の速度 V で運動する物体を S$'$ 系で見れば、$x' =$ 一定で静止しています。ある物体が静止しているか運動しているかは、観測者（慣性系）に依存します。

Q.　ガリレイ変換が成り立つ理由がわかりません。

A. ガリレイ変換は、絶対時間が存在して、同時刻の2つの慣性系の空間座標の関係は原点がずれるだけであるという仮定から得られます。それが「成り立つ」という意味がわかりませんが、このような変換のことをガリレイ変換といいます。

Q. ガリレイ変換の $t=0$ で $x=x'$ について S' のうち S に対して止まっている点は $x'=0$ のみという認識であっていますか？

A. いいえ違います。S' 系で静止している点はすべて S に対して一定の速度 V で x 軸方向に向かって動いています。$x'=0$ の点は S に対して動いていて $x=Vt$ となります。一般には S' 系で静止している点は $x'=$ 一定です。この点は、S 系では $x=x'+Vt$ と運動します。これを変形すると $x'=x-Vt$ となります。

Q. ガリレイ変換が正しくないのは光速度が不変だったからでしょうか？

A. これもなかなか鋭い質問です。実はガリレイ変換は数学的には正しいです。何も間違っていません。ローレンツ変換もそうです。物理学においては数学的に正しくても観測や実験結果に反する理論は現実の宇宙を記述する理論として生き残ることはできません。ガリレイ変換はそういう意味で生き残ることができなかったということです。

Q. ガリレイ変換は現実では何に役に立っているのですか？

A. ガリレイ変換は運動を記述する基本的な変換ですから、物体の全ての運動に役立っていると言えます。例えば地上に止まっている野球のピッチャーが時速160km のボールを投げたとき、時速100km の速さで走っている電車に乗っている人から見たらボールの速さは時速何 km ですか、という問題にはガリレイ変換が役に立ちます。あるいは船に乗っている人と地上で止まっている人の時間の進み方が同じだというのもガリレイ変換です。ただし、あまりに当たり前すぎて意識されないことの方が多いでしょう。

Q. ガリレイはなんでガリレイ変換を考え始めたのですか？

A. 一般に物理的な概念について名前がついている人がその概念を始めて考えたかどうか調べるのは非常に難しいことです。ガリレイ変換はおそらくガリレイが初めて考えたものではないでしょう。ガリレイ変換が考えられた動機もよくわかりませんが、変換式として意識することによって、ニュートンの運動方程式のもっている不変性が明確になるとは言えます。

5　ニュートン力学について

Q．ニュートンの運動方程式を導く方法はありますか？

A．「導く」ためには何か別のものが正しいと仮定する必要があります。そうでなければ導くことはできません。

Q．ある瞬間での速度というのは測定可能ですか？

A．これは良い質問です。速度というのは運動を見ているので瞬間的に観測することは不可能ではないかということですね。確かにそのとおりです。しかし、有限の時間間隔の平均速度を観測することは可能です。その間隔を非常に短くすることも原理的には可能です。これを無限に短くとった極限が瞬間の速さということになります。

Q．運動方程式にあてはまらない運動はありますか？

A．これはトートロジーですが、ニュートン力学の適用範囲内であればあてはまらない運動はありません。逆に言えば、　光に非常に近い速さの運動、非常に重力が強い場合の運動、微視的なスケールでの運動などでは、そのままではあてはまらないことがあります。

Q．ニュートン力学が通用しなくなる限界は？

A．物体の速度が光速に近いときです。また重力が非常に強いときは、非常に短い距離や短い時間の場合にも通用しなくなります。

6 慣性の法則と慣性系について

Q. 慣性系 S は系なので概念的なものだと思っていたのですが、ΔS や $\Delta S'$ と物理量を考えているため、何かの距離に対して置いた文字なのでしょうか？

A. そうですね。慣性系 S や S′ というのは座標系のことです。概念的なものと言ってもよいかもしれません。「ΔS」や「$\Delta S'$」というのは Δs^2 や $\Delta s'^2$ のことだと思いますが、これは世界間隔という物理量であり、数です。数学では大文字の S と小文字の s は全く別のものを表すことが多いので注意して下さい。

また、慣性系 S と S′ というのは違う慣性系だと思っていたのですが、同じ tx 平面上で表しているのはなぜでしょうか？

A. S と S′ は違う座標系ですが、同じ物理を表すことができます。例えば、ある質点 A の位置は S と S′ の両方で表すことができます。したがって両者がカバーしている時間・空間は当然重なっているのです。ですので、S の座標平面である tx 平面上に S′ の座標軸である t' 軸、x' 軸を書くことができます。

Q. 電車に乗っているときの状況を高校物理では慣性の法則と言っているのはなぜでしょうか？

A. 電車が地上に対して等速直線運動しているときには、地上静止系で慣性の法則が成り立つのであれば、電車静止系でも慣性の法則が成り立ちます。これはまったく問題ありません。ただし、高校物理では電車が加速したり減速したりしているときの電車静止系での物体の運動を慣性の法則であるかのように書かれているもの見受けられるようです。これについては別途お答えします。

Q. 電車が加速するときに進行方向と逆向きに、電車が減速するときに進行方向に体が傾くのが慣性の法則ではないのか？

A. この例は慣性の法則の説明としてはふさわしくないと私は考えています。なぜならこの場合電車静止系は慣性系ではないからです。むしろ慣性力の説明にはなっています。慣性力は慣性の法則から説明することはできますが、慣性の法則そのものではありません。

Q. 慣性の法則は重力があるかないかでどう変わるのか？

A. これは良い質問です。重力は物体に働く力なので、厳密に言えば重力が働いているところでは慣性の法則はそのままでは成り立たないことになります。例えば野球のピッチャーが投げたボールは直線を描くことはなく重力を受けて放物線を描きます。では例えばスケートリンクでアイスホッケーのパックが氷上で等速直線運動しているのは慣性の法則で説明できるでしょうか？実はパックには重力の他に氷から重力の方向とは逆向きに同じ大きさの力（垂直抗力という）が働いています。そのため、パックに対して鉛直方向に働いている力

は正味ではゼロになって力が働いていないのと同じになります。そのためパックは等速直線運動をします。

Q.　慣性の法則は運動方程式から導かれる。なぜ別々の法則として習うのか?

A.　非常にいい質問です。運動方程式から慣性の法則が導かれるというのは正しい。

しかし、慣性の法則とは、慣性の法則が成り立つような系が存在する、すなわち慣性系が存在することを主張します。一方、運動方程式はその慣性系でのみ成り立つ法則であり、力を定量的に定義するものです。このように、慣性の法則と運動方程式は、互いに密接に関連するものの、慣性の法則のほうがより基礎的であり、運動方程式の方はより高次の概念であるので、異なる法則として扱われるべきだと考えられます。

Q.　物理で〇〇系というのがよく出てきますが、その正しい定義はなんですか？

A.　そうですね。系というのは物理ではいくつかの意味で使われています。慣性系の「系」は座標系の「系」だと考えて下さい。慣性的座標系という意味です。

7 光と光速について

Q. 光速は向きによらないということでしたが、重力などの影響は受けますか？例えば月での光速は地球より遅いということはないでしょうか？

A. 重力の効果はこの授業の主題である特殊相対論では扱えません。一般相対論という別の理論が必要です。一般相対論によれば、重力が存在していてもその重力によって自由落下している観測者が局所的な実験によって光速を測定する限りは光速は一定です。向きにもよりません。ただし、観測者が慣性系ではなかったり、あるいは遠く離れた場所をとおる光の速度を計算によって求める場合には見かけ上光速が重力の効果を受けて遅くなることが知られています。このような見かけ上の光速で言えば、月の方が地球よりも重力が弱いので、月での光速を地球上での観測者が計算すると地球上の光速よりも速いと計算されます。しかし、これは見かけ上のことで、月の重力で自由落下している観測者が月での光速を測定すると、地球上での光速と同じく秒速約 30 万 km で向きにも依存しません。

Q. 光速の具体的な値はどのように導きましたか？また当時の物理学者たちは疑問に思ったり不思議に思ったりしなかったのでしょうか？

A. 光速の具体的な値は精度は良くないものの既に 1676 年にレーマーによって観測的に測られていました。マックスウェルが電磁気学の基礎方程式を整理したのが 1864 年で、その頃に一定の速度で伝わる波としての電磁波を理論的に予言し、その際に電磁波の速さを理論的に導くことにも成功しています。そしてそれが光であると予測していました。電波はヘルツによって 1888 年に発見されました。当時の物理学者は、光速が一定であることとガリレイ変換とを整合させるため、複雑なエーテル理論を発展させました。この問題が解決したのがアインシュタインによる 1905 年の特殊相対性理論です。

Q. 光のドップラー効果は特殊相対論で説明できますか？また光のドップラー効果はローレンツ変換と深い関係がありますか。

A. そうです。まさにローレンツ変換で説明できます。ただし、光源と観測者の相対速度が光速に比べて十分遅い場合には、光を波として考えれば、音波のドップラー効果と同じように理解することもできます。

Q. 光よりも速く進むものは宇宙にはないのですか？

A. ないとみられていますが、ないということを証明することはできません。1967 年にファインバーグが光より速い粒子の可能性を理論的に提唱しました。ただし通常の粒子をどんなに加速しても光より速くすることはできません。また実験的にはそのような粒子は検出されていません。2011 年に光より速いニュートリノが検出されたとする論文が国際的な実験グループによって発表されましたが、その後この実験の精度が不十分だったことがわかり論文は撤回されました。

Q. 光速度不変の原理について、今では実験的にではなく理論的に示されたりしないのですか？自分は光速度は無限大であり、人間の観測できる速度の上限が光速なのだと思います。

A. これはいい質問です。光速度不変の原理を実験的に示すことはできません。実験的には光の速さはほぼ一定であることが確かめられていると言えるだけです。では理論的に示すことができるかということですが、理論的に示すためにはなにか別のことが正しいと仮定して証明するという流れになります。つまり、別の拠り所が必要になります。そして理論的には、電磁気学の基礎方程式であるマックスウェル方程式を仮定すれば、電磁波（光）の伝播速度が一定であることが証明できます。「自分は光速度は無限大であり、人間の観測できる速度の上限が光速なのだ」と思うのは自由ですが、実験的には光の速さは無限大ではなく有限の値であることはわかっていますし、理論的にも電磁波（光）の伝播速度は無限大ではなく有限の一定の値をもつ定数です。人間は原理的には光速より速い速度を測定することができます。

Q. 実験によって光速は一定であるというのは、近似的に一定なのかそれとも無限に等しいのか？

A. 実験によって光速が一定であることを無限に良い精度で確かめることはできません。歴史的には、光速はある有限のしかし非常に高い精度で一定値をとることが実験的に確かめられました。これを受けて、1983 年に国際度量衡総会は光速を 299792458 m/s と定義しました。これにより、光速は測定値ではなく定義値となり、無限に正しい精度で 299792458 m/s であることになりました。これにより 1 秒間に光が進む距離を 299792458 m とすることになるので、距離の長さ m が時間の長さ秒によって決まる単位であることになりました。

Q. 実験で光速一定を求めるためにはどう実験したのでしょうか？

A. いろいろな実験があります。ここですべてを紹介することはできませんが、1887 年に行われた有名なマイケルソン・モーリーの実験では、地球が太陽の回りを公転運動していることを考慮して、ある方向の光とそれに垂直な方向の光の光速の差を測る実験が行われました。その前もその後も何度も光速を測定する実験が行われ、光速が一定ではないとする有意な結果は出ていません。

Q. 全ての慣性系において光速が同一であることはどこから導かれるのか?

A. どこからも導かれません。これはアインシュタインが提案した仮定です。実験的には光速が一定であるということは現在では非常に高い精度で確かめられています。

Q. 電磁場とは何か?電磁波が光であるとは?

A. 電磁場とは、電場と磁場のことです。磁場というのは例えば磁石が発生させる場のことです。一方、電場とは例えば静止した荷電粒子がその周りに発生させる場の事です。電磁場の振動が一定の速さで伝わっていく現象を電磁波と言います。電磁波は波なので波長がありますが、約 380nm（ナノメートル＝ 1m の 10 億分の 1）から約 810nm までの波長範囲の電磁波は人間の目が知覚することができるので、可視光といいます。

そうでない電磁波は目には見えないのですが、物理学では一般に電磁波を光といいます。

Q. 光にガリレイ変換を適用できないことと光の波動と粒子としての二重性は関係あるのか？

A. ありません。

Q. 真空で光は振動するなら、宇宙は真っ暗ではなく沢山の星を肉眼で見ることができるのでしょうか？

A. そのとおりです。

Q. 光速は全ての場合において一定であるが、絶対的な時間が存在しないのにそれをどのように証明するのか？

A. 絶対的な時間が存在せず、各慣性系ごとに時間は異なります。その慣性系ごとに異なる時間についての速度が一定だということです。これは実験的にいろいろな慣性系における光速を測定すれば実験的な証明になりますし、理論的にはローレンツ変換によって光速一定が全ての慣性系において実現されます。

Q. なぜ光速が一定なのかは理論的には今後も解明されないのでしょうか？

A. 物理学ではこういう「なぜ？」という質問にはなかなか答えにくいです。一つの答え方としては、電磁気学にはローレンツ不変性という対称性があるからというものです。

Q. 光に関する理論は数式のみで推測しているのか、それとも実際に実験することは可能なのでしょうか？

A. もちろん実験することは可能です。物理学の理論は実験と全く関係ない数式のみで推測するということはありません。そもそも理論の出発点となるものは実験的な検証を経ているからです。また理論は数学的に可能なだけでなく、実験的な検証に耐えなければなりません。ただし、(「数式」ではなく）数学は物理学において本質になるものです。数学のない物理学はありえません。

8　世界間隔について

Q.　4 次元時空を考えるときは $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ になるのでしょうか？

A. ちょっと答えづらいのですが、質問の趣旨は、「3 次元空間の距離 $\Delta\ell$ は $\Delta\ell^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ であるが 4 次元時空での適切な距離は $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ となるということか？」というものだと思います。そういう質問であれば、答はイエスです。

Q.　時空図に世界間隔を定めるところは理解できた。しかし、私にはつじつま合わせにしか思えない。

A. これは大変素晴らしい気づきです。それはまさにおっしゃるとおりなのです。アインシュタインは、光速不変を仮定して世界間隔を定義し、光速不変を実現するために世界間隔を導入し、これを不変に保つ変換としてローレンツ変換を導きました。異なる慣性系での光速不変を成り立たせるために「つじつま合わせ」でローレンツ変換が出てきたというのは、全くそのとおりなのです。では「つじつま合わせ」では何が駄目なのでしょうか？それが問題です。「つじつま合わせ」で求められたローレンツ変換で、光速不変を支持する数々の実験結果や時間の遅れを支持する実験結果を綺麗に説明することができます。一方、より直感的に正しそうで、「つじつま合わせ」ではないように見える、絶対時間やガリレイ変換やそこから導かれる速度の加法性は、このような実験結果に全く合わないのです。物理学は自然科学ですので、たとえ一見すると「つじつま合わせ」に見えようとも、最終的には実験結果を説明できるあるいは実験結果によって支持される理論が選ばれます。そして、この場合、絶対時間やガリレイ変換や速度の加法性を培ってきた直感の方を修正しなければならないのです。

Q.　世界間隔が $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2$ というのは三平方の定理で事象 A, B の直線距離（時間？）を出しているということでよいでしょうか？

A. そうですね。なかなか鋭い質問です。時間 Δt に対応する長さが $c\Delta t$ だとすると、確かに三平方の定理に似ています。ただし $c^2\Delta t^2$ の係数が (-1) であるところが通常の三平方の定理とは違いますね。実際、時空図上の線分 AB の長さの二乗は $c^2\Delta t^2 + \Delta x^2$ になります。しかし世界間隔はこれとは異なり、$-c^2\Delta t^2 + \Delta x^2$ です。ですので単純な三平方の定理による距離ではないということです。

Q.　世界間隔って結局なんなのか？

A.　数学的には定義以上のものではありません。2 点 A, B 間の世界間隔は

$$\Delta s^2 = -c^2(t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2 \tag{8.1}$$

です。その更に深い意味は、この講義ノートをよく読んでもらえれば少しわかるのではないかと思います。さらにもっと深い意味を知りたければ、ここでは語り尽くせないので、特殊相対性理論・一般相対性理論を勉強

して下さい。

Q. 「2点が同一光線上にある」とはどのような状況ですか？

A. そうですね。「2点」というのは2事象と言った方がいいかもしれません。二つの事象 A, B が同一の光線上にあるということは、ある光が事象 A をとおり事象 B をとおる、あるいは順序を逆にして事象 B をとおり事象 A をとおるということです。簡単のため空間は x 軸方向だけ考えることにします。事象 A、B の座標を (t_A, x_A), (t_B, x_B) とすると、時間 $|t_B - t_A|$ の間に光が距離 $|x_B - x_A|$ だけ進むということです。光の速さは c ですから、これから

$$\frac{|x_B - x_A|}{|t_B - t_A|} = c \tag{8.2}$$

が結論できます。この両辺を2乗してから $|t_B - t_A|^2$ を掛けて、右辺を左辺に移項すると、

$$-c^2(t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2 = 0 \tag{8.3}$$

が得られます。

Q. $\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2$ の意味がつかめませんでした。

A. 二つの事象 A,B の座標を (t_A, x_A), (t_B, x_B) とするとき、

$$-c^2(t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2 \tag{8.4}$$

は特別な意味を持っています。そこで $\Delta t = t_B - t_A$, $\Delta x = x_B - x_A$ とおけば、この組み合わせは $-c^2\Delta t^2 + \Delta x^2$ と書くことができます。これを Δs^2 とおいたということです。

Q. なぜ同一光線上の二点について $\Delta s^2 = 0$ なのですか？

A. 速さは距離 / 時間だから、光が x 軸上を時刻 t_A で x 座標 x_A の点から時刻 t_B で x 座標 x_B の点に進んだとすると

$$\frac{|\Delta x|}{|\Delta t|} = c \tag{8.5}$$

が成り立ちます。ただし $\Delta t = t_B - t_A$, $\Delta x = x_B - x_A$ とおきました。両辺を二乗して両辺に Δt^2 をかけ $c^2\Delta t^2$ を右辺から左辺へ移行すると

$$-c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 = 0 \tag{8.6}$$

が導かれます。したがって $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2$ とおけば、光の経路に沿って $\Delta s^2 = 0$ です。この命題は逆も正しいです。つまり $\Delta s^2 = 0$ ならば

$$\frac{|\Delta x|}{|\Delta t|} = c \tag{8.7}$$

となり二点は同一光線上にあることになります。同様に、異なる慣性系 (t', x') でも光速が c だとすると、同じ議論から

$$\Delta s'^2 \equiv -c^2\Delta t'^2 + \Delta x'^2 = 0 \tag{8.8}$$

です。逆も真です。

Q.　$\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2$ がどのような考えでこの形になったのでしょうか？

A.　まず、この形にすると、どの慣性系でも光速が一定であれば、どの慣性系でも光の経路に沿って $\Delta s^2 = 0$ になるということを観察します。そうすると、この量を不変にするような変換を慣性系間の変換として定めれば、それがガリレイ変換の代わりに光速不変の原理を実現する変換として使えるという結論が得られます。この結論から逆算して、この形を慣性系間の変換に対して不変な距離として採用したのでしょう。

9　ローレンツ変換について

Q. ローレンツ変換の式 (9.1) の $t' =$ の式の右辺の分子にある $\frac{V}{c^2}x$ は何を示しているのでしょうか？

$$\begin{cases} t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right) \\ x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\left(-Vt + x\right) \end{cases} \tag{9.1}$$

A. 何を示しているんでしょうね。$t' =$（定数）としたときに $t = \frac{V}{c^2}x +$（定数）となりますから、S 系の同時刻面と S′ 系の同時刻面の差を表しているとは思います。

Q. ローレンツ変換において、S 系の同時刻面と S′ 系の同時刻面が異なるのは、絶対時間が存在しないからでしょうか？ $t' = t$ になるときはないのでしょうか？

A. 論理の順番としては、「光速度一定」→「世界間隔の不変性」→「ローレンツ変換」→「同時刻面が異なる」→「絶対時間が存在しない」となります。ですので、「絶対時間が存在しないから同時刻面が異なる」のではなく、「同時刻面が異なるから絶対時間が存在しない」が正しいです。それから、ローレンツ変換で $t' = t$ となるのは、$V = 0$ のときだけです。つまり 2 つの慣性系の相対速度がゼロのとき、時間座標は共通で、同時刻面が一致します。

Q. ローレンツ変換を導くときどうして一次変換を考えるのですか？

A. この授業では簡単のために一次変換の形を仮定しました。ガリレイ変換は一次変換であるのでそれを参考にして一次変換の形を仮定しました。その仮定のもとで欲しい性質を満たす変換が得られたので良しとするということです。

Q. ローレンツ変換として一次変換を考えるときの a_{00} や a_{11} などが何を表しているのか理解できなかった。

A. 定数です。

Q. $V > c$ のとき $\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}$ は虚数になってしまうがどうなるのか？

A. これは鋭い質問です。実はこうやって虚数が出てきてしまうようなときには、その前に戻って考えてみ

るのが鉄則です。もともと Lorentz 変換を導くときは、まず 1 次変換

$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = a_{10}t + a_{11}x \end{cases} \tag{9.2}$$

を仮定して、次に世界間隔の不変性などから

$$\begin{cases} a_{10} + a_{11}V = 0 \\ -c^2a_{00}^2 + a_{10}^2 = -c^2 \\ -2c^2a_{00}a_{01} + 2a_{10}a_{11} = 0 \\ -c^2a_{01}^2 + a_{11}^2 = 1 \end{cases} \tag{9.3}$$

という連立方程式を導いてそれを解いたのでした。(t, x) は事象の座標なので実数でないといけません。そうすると、式 (9.2) に現れる係数 a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11} はすべて実数でなければなりません。連立方程式 (9.3) で、第一式から a_{10}, 第 2 式から a_{00}、第 4 式から a_{01} を消去すると、第三式から

$$\left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right] a_{11}^2 = 1 \tag{9.4}$$

という式が得られます。$a_{11}^2 \geq 0$ ですから $1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2 > 0$ つまり、$|V| < c$ でなければならないことがわかります。逆に言えば $|V| > c$ のときには、ローレンツ変換は存在しないということです。

Q.　なぜローレンツ変換 (9.5) で x^0 と x^1 を入れ換えても同じ式になるならば時間と空間が対等なのでしょうか？

$$\begin{cases} x'^0 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(x^0 - \beta x^1\right) \\ x'^1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(-\beta x^0 + x^1\right) \end{cases} \tag{9.5}$$

A.　$x^0 = ct$ で $x^1 = x$ なので、ローレンツ変換 (9.5)（x 軸方向のローレンツブースト）は ct と x の入れ換えに対して不変です。これを両者は対等だと表現しています。似たようなことは二次元平面の原点を中心とする回転

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \tag{9.6}$$

でも起こります。二次元平面の回転では $x \to -y$ にして $y \to x$ とする変換に対して不変です。これは x 軸と y 軸が対等であるからです。それと同じようなことが x 軸方向のローレンツブーストにおける ct と x で起こっているということです。

Q.　ローレンツ変換でなくガリレイ変換が成立するのはどれくらいの速さまでですか？でないと我々の 4 次元空間では一生出会えないと思うのですが。

A.　ガリレイ変換が有効なのは 2 つの慣性系間の相対速度 V が $|V| \ll c$ を満たすときです。ただし、$|V| \ll c$ が成り立っていなくても異なる慣性系に静止している二人の観測者が出会うことは可能です。ただ相対速度が大きいだけで同じ時空に住んでいますからね。

Q.　時空図の中に出てきた x' 軸の xt 平面内での方程式が

$$t = \frac{V}{c^2}x \tag{9.7}$$

という結果で係数が V/c などの 1 次同士の分数にならないのはなぜですか？

A.　この式自体は、ローレンツ変換の式で $t' = 0$ とすることによって導かれます。なぜ V/c では駄目かというと、x は長さで t は時間ですから V/c という無次元の数が係数になることはできないからです。

10 時間の遅れについて

Q. 地球から見て光速に近い速さで飛ぶ宇宙船から地球を見るとやはり光速に近い速さで動いているように見えるのに、地球から出発した宇宙船が地球に帰ってきたときに宇宙船に乗っていた人の時間だけが遅く進んでいる理由が知りたいです。

Q. 光に近いスピードで動くと時間が遅れ未来に行けると聞いていたが、それは観測者に依存するのではないか？観測者 A が観測者 B に対して光速に近い速度で運動していたら、B から見て A の時計が遅れて見えたとしても、A から見ても B の時計が遅れて見えるのだから、結局主観的な時間移動は不可能ではないか？

A. これらは同じ趣旨の質問ですので、まとめて答えましょう。慣性系 S と慣性系 S$'$ の間の時間の進み方の関係については両者は全く対称なので、どちらかの慣性系に観測者をおくと、もう片方の慣性系に対して静止している時計の進みはこの観測者にとって遅くなります。問題は、観測者 A と B が最初同じ時刻同じ場所で時計を合わせておいたあとに、観測者 A は慣性系 S に対して静止しており、観測者 B は慣性系 S$'$ に乗って A から一旦離れ、その後今度は逆向きに動いている慣性系 S$''$ に乗り換えて A と同じ時刻同じ場所で再会して両者の時計を突き合わせて確かめる場合です。答を言うとこの場合は、A の時計の方が B の時計に比べて進んでいることがわかります。この思考実験を詳述するのはかなり大変なのでここでは述べませんが、この問題の要点は観測者 A の運動と観測者 B の運動は非対称であるということです。A は常に慣性系 S に対して静止していますが、B は慣性系 S$'$ から S$''$ に乗り換える際にはっきりと慣性系に対して静止していない瞬間があります。

Q. 止まっている人と動いている人で過ごす時間が異なるというのはローレンツ変換 (9.5) の第一式が関わっているのですか？

A. そうです。

Q. 電車やバスに毎日乗る人と、ほぼ家の中で動かない人とでは老いのスピードは違いますか？

A. 「老いのスピード」がなにを意味するのかですが、経験する時間の長さという意味だとすると「老いのスピード」は違います。純粋に相対論的な効果だけに限定すれば、電車やバスに毎日乗る人の方がほぼ家の中で動かない人に比べて経験する時間の長さは短くなります。ただしその効果は常に電車やバスに乗り続けたとしても 0.00000000000001 % ぐらいで、通常は無視できる程度です。

Q. 時間の遅れの式で $V \to c$ の極限が気になりました。

A. その極限では $t'/t \to 0$ になります。

Q. 速度の大きさによって時間の流れる速さが変化すると式で示されたが、加速度運動している系からすると、静止系で時間の流れの加速が起こっているように見えるのか？

A. なかなかいい質問です。加速度運動している場合は $V = V(t)$ と 2 つの系の相対速度が時間に依存します。その場合でも微小時間では等速運動している場合と同じ時間の遅れの式が使えます。つまり、各瞬間瞬間で

$$dt' = \sqrt{1 - \left(\frac{V(t)}{c}\right)^2}\,dt \tag{10.1}$$

が成り立つということです。従って、だんだん $V(t)$ が大きくなると、それにつれて、静止系から観測したときの加速度系の時間の遅れの効果はだんだん大きくなります。ただし、この効果は相対的な効果なので、加速度運動している系から見ると、今度は静止系で時間の流れる速さがだんだん遅くなります。

Q. 人類が火星や他の惑星や ISS などにいて地球の速度と明らかに違う場合は地球とは時間の流れが違いますか？ ISS は地球の周囲をものすごい速さで回っているはずなので、同時中継ができるということはそれでも誤差の範囲内ですか？

A. 最初の質問に対する答えはイエスです。次の質問についてです。ISS は地球の周囲をものすごい速さで回っているといいますが、その速さは約 7.7 km/s です。これは時速に直すと約 27700km/h と大変速いようです。これを V とします。光速は $c \approx 300000$km/s ですから V/c は

$$\frac{V}{c} \simeq \frac{7.7}{300000} \simeq 0.000026 \tag{10.2}$$

とかなり小さくなります。時間の遅れの式に入るのはこれの 2 乗で

$$\left(\frac{V}{c}\right)^2 \simeq 0.00000000066 \tag{10.3}$$

となりますから、時間の遅れの効果はだいたい 0.000000033% 程度ということになります。同時中継していてテレビを見ている人が時間の遅れに気がつくことはないでしょう。それぐらい光速というのは速いのです。

ただしこれを誤差で済ませていいかというとそう簡単ではありません。ISS に積まれている時計はこの時間の遅れの効果によって地球の時間とずれてきます。時計というのは僅かなずれであっても長時間動かし続けることによってかなり大きなずれになるものです。例えばこの計算でいけば、1 年で約 0.01 秒も ISS の時計は地球の時計に比べて遅れることになります。これはもちろん無視できません。このような効果は ISS の運用に考慮されなければなりません。

Q. 花子さんと太郎くんはお互いの時間軸に沿って待ち合わせをしたら会えないということですか？

A. そうです。一回は会えます。それでそのときに時計合わせをしますね。でもお互いがそれぞれの慣性系に対して静止している限り、二度と会えません。

Q. $V > c$ のとき $\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}$ は虚数になってしまうがどうなるのか？

A.　このとき時間の遅れの式をそのまま使うと、t が実数なら t' は虚数になってしまいます。しかし、時間が虚数ということはありません。この場合、ローレンツ変換は存在しません。実は $V > c$ の場合はそのような系に対して静止した観測者の時間というものを定義することはできません。

11　その他、相対性理論に関すること

Q.　将来瞬間移動やタイムスリップやどこでもドアは可能になるのか？

A.　未来に行くタイムスリップだけは時間の遅れを利用すれば実現することができます。その他については、今回の授業の範囲内（特殊相対論まで）では可能という話にはなりません。ただし、一般相対論の枠組みでそのようなことができるかどうかは未解決の問題で、現在も研究が行われています。

Q.　一般相対論は重力によって曲げられた空間のために作られたのですか？

A.　いいえ。重力とは空間の曲がりであるというのが一般相対論の基本的考え方です。