

2026 年度秋学期「宇宙物理概論」

—現代宇宙物理学の観測と理論の基礎の概論—

原田担当部分講義ノート（暫定版）

原田知広^{*1}

2026 年 10 月 15 日

© 原田知広 2026

^{*1} 立教大学理学部物理学科: harada@rikkyo.ac.jp

これは 2026 年度の「宇宙物理概論」（原田担当部分）の講義ノートです。合計 7 回の講義です。ミニマムしか扱いませんので、宇宙物理学に関する網羅的な知識を得ることを目指しません。ただし宇宙物理学は人によって何をミニマムとするのか全然違う学問でもあります。具体的には、基礎の基礎を身に着けたあと、宇宙物理学を広く浅く概観します。もちろん興味のある課題はもっと深く勉強してください。

これは暫定版です。いろいろとたくさんの誤りがあると思うので指摘してください。また皆さんの質問等に対してコメントも入れていきます。そしてこの学期の最後にその時の最新版を公開する予定です。

目次

第 1 章	天文学・宇宙物理学の基本概念 (1)	5
1.1	単位系と物理定数	5
1.2	天文学・宇宙物理学の単位	8
第 2 章	天文学・宇宙物理学の基本概念 (2)	11
2.1	天体の明るさ・等級・色・位置・距離	11
2.2	天文学的観測手段	14
2.3	素粒子の世界	17
2.4	天体の階層性	18
第 3 章	重力に関する基本的な現象	23
3.1	天体力学	23
3.2	重力多体系	27
第 4 章	自己重力的流体力学	31
4.1	自己重力的完全流体	31
4.2	重力不安定性	33
4.3	球対称星の力学平衡	37
第 5 章	輻射と恒星	41
5.1	輻射	41
5.2	恒星の構造と進化	44
第 6 章	コンパクト星とブラックホール	49
6.1	白色矮星と中性子星	49
6.2	ブラックホール	52
第 7 章	ビッグバン宇宙論	61
7.1	膨張宇宙論	61
7.2	ビッグバン理論の概要と問題点	65

参考文献

71

第 1 章

天文学・宇宙物理学の基本概念 (1)

宇宙物理学と素粒子物理学は 16 世紀以降の近代物理学の発展に伴ってほぼ一体として発展してきました。一方、天文学はそれよりずっと古い歴史がありますが、現代物理学に親しんだ我々からみると少しなじみにくいところがあります。そのあたりを自由自在に行き渡れるようにすれば両方のいいところを使うことができるようになるでしょう。そのなじみにくさの最たるところが単位や指標に関わる場所ですので、それを含めて 2 回の講義でマスターしていきましょう。

1.1 単位系と物理定数

1.1.1 MKS 単位系と cgs 単位系

みなさんが高校まで習った物理では単位系は MKSA あるいは SI をとっていたと思いますが、宇宙物理学・素粒子物理学ではごく最近まではほぼすべての論文で cgs 単位系をとっていました。今はこの 2 つの単位系が併存していますが cgs が主流です。この講義でも cgs 単位系を基本にしていきましょう。MKS と cgs の関係は

$$1\text{m} = 100\text{cm}, \quad 1\text{kg} = 1000\text{ g} \quad (1.1.1)$$

によって換算できます。現在の時間と長さの単位の決め方は、

- 1 秒=原子量 133 のセシウム原子の基底状態の 2 つの超微細準位間遷移の振動による周期の 9192631770 倍
- 1m=真空中の光が 299792458 分の 1 秒間に進む距離

となっています。これによって真空中の光速は 299792458 m/s という定義値になります。

SI 接頭辞というものが 3 桁ごとに決まっています。その他に慣用的に使われている 100, 10, 0.1, 0.01 に対応する接頭辞もあります。大きい方から小さい方に並べると

- 10^{15} : P (peta)
- 10^{12} : T (tera)

- 10^9 : G (giga),
- 10^6 : M (mega)
- 10^3 : k (kilo)
- 10^2 : h (hecto)
- 10^1 : da (deca)
- 1
- 10^{-1} : d (deci)
- 10^{-2} : c (centi)
- 10^{-3} : m (milli)
- 10^{-6} : μ (micro)
- 10^{-9} : n (nano)
- 10^{-12} : p (pico)
- 10^{-15} : f (femto)

MKS では m, kg, s が基本単位です。cgs では cm, g, s です。これらですべての力学量を表すことができます。電磁気学ではこれに加えて A (アンペア) を用います。

基本単位だけでは不便なことも多いので、基本単位の組み合わせで作られる組立単位を用いることも多いです。主な組立単位として、エネルギーの単位があります。MKS では J (ジュール)、cgs では erg (エルグ) が使われます。エネルギーの単位は仕事の単位ですから

$$J = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2, \quad (1.1.2)$$

$$\text{erg} = \text{g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}^2 \quad (1.1.3)$$

です。これより

$$J = 10^7 \text{erg} \quad (1.1.4)$$

という換算公式が得られます。

また電磁気学で使われる組立単位は A を用いて

- クーロン: $C = A \cdot s$
- ワット: $W = J/s$
- ボルト: $V = W/A = J/A/s$

です。

1.1.2 物理定数と便利な式

関連して主な物理定数を上げておきましょう。

- 重力定数 $G \simeq 7 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$
- Boltzmann 定数 $k_B \simeq 1.4 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$

- 換算 Planck 定数 $\hbar \simeq 1 \times 10^{-27} \text{ erg}\cdot\text{s}$
- 素電荷 $e \simeq 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- 陽子質量 $m_p \simeq (1/N_A) \text{ g} \simeq 1.7 \times 10^{-24} \text{ g}$
- Avogadro 定数 $N_A \simeq 6 \times 10^{23}$

ここで Boltzmann 定数の意味について考えます。これは統計力学で初めて現れる定数ですが、実は熱力学でも理解できます。理想気体の状態方程式はモル数を N とすれば気体定数を R とすると $PV = NRT$ ですが、これを粒子数密度 n を用いると $P = nk_B T$ と書けます。したがって、Boltzmann 定数は $k_B = R/N_A$ と書かれるということです。

また、 $E = k_B T$ という式からわかるように、温度 [K] とエネルギー [erg] を換算するための定数でもあります。 $k_B = 1.4 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$ であるということは、

$$1.4 \times 10^{-16} \text{ erg} = 1 \text{ K} \quad (1.1.5)$$

であるということです。

もともと N_A の定義は、 ^{12}C が N_A 個あると 12 g になるというものでした。 ^{12}C には核子（中性子と陽子）が 12 個含まれ、それぞれの質量はほぼ全て陽子の質量に等しいので、 $m_p \simeq (1/N_A) \text{ g}$ になるというわけです。

エネルギーの単位として、erg や J の他に大事な単位として eV（エレクトロンボルト）があります。 $C = A \cdot s$ 、 $V = W/A = J/A/s$ ですから、

$$\text{eV} \simeq 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} = 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg} \quad (1.1.6)$$

となります。これは電子が 1V の電圧で加速されたときになされる仕事です。eV は素粒子・宇宙物理学分野でエネルギーの単位として広く使われています。eV を用いると $\hbar$ に対して

$$\hbar c \simeq 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \quad (1.1.7)$$

という式が出てきて、これが意外と便利です。

あと覚えておくと便利なのは (1.1.5) と (1.1.6) から得られる関係

- $1 \text{ eV} \simeq 10^4 \text{ K}$

です。

また Einstein の質量とエネルギーの等価性の式 $E = mc^2$ があります。そこで覚えておくと便利なのは

- 陽子の質量エネルギー: $m_p c^2 \simeq 1 \text{ GeV}$
- 電子の質量エネルギー: $m_e c^2 \simeq 0.5 \text{ MeV}$

です。

1.1.3 Planck スケール

最後に G と $\hbar$ と c から作られる質量を考えましょう。これは

$$m_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \simeq 10^{-5} \text{ g} \quad (1.1.8)$$

で、これを Planck 質量といいます。ここからいろいろな量が作れます。

- Planck エネルギー: $E_{\text{Pl}} = m_{\text{Pl}} c^2 \simeq 10^{19} \text{ GeV}$
- Planck 長: $\ell_{\text{Pl}} = \hbar / (m_{\text{Pl}} c) \simeq 10^{-33} \text{ cm}$
- Planck 時間: $t_{\text{Pl}} = \ell_{\text{Pl}} / c = \hbar / E_{\text{Pl}} \simeq 10^{-43} \text{ s}$

個人的には私はいろいろな量を暗算するときにこれらの量を使っています。

1.1.4 演習問題

1. 次の問に答えよ。ただし有効数字 1 桁で良い。
 - (a) cgs 単位系では $G \simeq 7 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ である。これを MKS 単位系にするとうなるだろうか？
 - (b) Planck エネルギーが約 10^{19} GeV であることを確かめよ。
 - (c) 太陽表面の温度は約 6000 K である。これはエネルギーで言えば何 eV か？

1.2 天文学・宇宙物理学の単位

1.2.1 単位としての太陽パラメータ

天文学や宇宙物理学で質量や距離を表すのに MKS 単位系や cgs 単位系を直接使うのはあまり便利ではありません。なぜなら、これらの学問では非常にスケールの大きいものを扱わなければならないのに、MKS や cgs は我々が日常扱っているような長さや質量や時間に基づいているからです。そこで登場するのが我々にとって最も身近な恒星である太陽です。

ここで太陽の基本的なパラメータを上げていきましょう。

- 質量 $M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{33} \text{ g}$
- 半径 $R_{\odot} \simeq 7 \times 10^{10} \text{ cm}$
- 表面温度 $T_{\odot} \simeq 6000 \text{ K}$
- エネルギー放出率（明るさ） $L_{\odot} \simeq 4 \times 10^{33} \text{ erg/s}$

これらを天体の質量や半径や温度やエネルギー放出率の単位に使うことが多いです。ちなみに天文学では単位時間あたりのエネルギー放出率を明るさ (luminosity) といいます。力学では仕事率 (power) と習いました。

また太陽と地球にまつわるパラメータとして次のものが大切です。

- 天文単位 (au) (太陽と地球の平均距離): $1 \text{ au} \simeq 1 \text{ 億 } 5 \text{ 千万キロメートル} \simeq 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$
- 年 (yr) (地球の公転周期): $1 \text{ yr} \simeq 365 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s} \simeq 3 \times 10^7 \text{ s}$

このような数字を有効数字一桁で良いので覚えておくことは非常に大事なことです。もちろんすぐ調べられるのですが、覚えておけばいつでも頭の中で考えたり計算できたりします。早く答にたどり着く能力をもつということはみなさんが考えているより遥かに大切なことです。

1.2.2 パーセク

天文学では距離が非常に重要なのですが、それを正確に測るのは非常に難しいことでもあります。そこで最も正確に距離を測る仕組みが年周視差を利用する方法です。年周視差とは図 1.1 のように、地球が太陽の周りを一年かけて公転する間に星の天球上の見かけの位置が変化することです。実際には非常に遠方にある年周視差が無視できる星との天球上のみかけの位置の変化を観測します。

年周視差の大きさと距離は反比例します。そこで年周視差が 1 秒 (") の場合の星の距離を 1 pc (パーセク) といいます。ちなみに秒というのはここでは度数法での角度の単位です。度数法というのは円を 360 度 (°) として 1 度を 60 分 (') として 1 分を 60 秒とします。ただし実際の計算では度数法よりも弧度法の方が便利なが多いことです。弧度法は角度を単位半径の円弧の長さで表す方法で単位はラジアンと呼ばれたりもしますがこの単位は付けないのが普通です。したがって、

$$1'' = \frac{2\pi}{360 \times 60 \times 60} \quad (1.2.1)$$

ということです。図からわかるように

$$1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ au}}{\tan 1''} \simeq 3.1 \times 10^{18} \text{ cm} \quad (1.2.2)$$

です。

パーセクは天文学・宇宙物理学では最も頻繁に使用される距離の単位です。パーセクより少し短い長さの単位が光年 (ly) です。これは光が 1 年間に進む距離で、

$$1 \text{ ly} \simeq 3 \times 10^{10} \text{ cm/s} \times 3 \times 10^7 \text{ s} \simeq 1 \times 10^{18} \text{ cm} \simeq 0.3 \text{ pc} \quad (1.2.3)$$

と計算できます。光年は science fiction (SF) ではよく出てきますが、天文学でも宇宙物理学でも残念ながら少しマイナーな単位です。

1.2.3 演習問題

1. 次の問に答えよ。ただし有効数字 1 桁で良い。

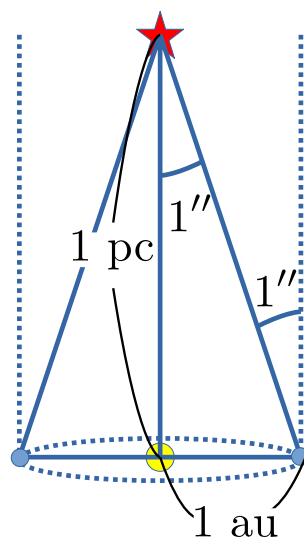


図 1.1 パーセク

- (a) 太陽には核子（陽子と中性子）が何個含まれているか？
- (b) 太陽から放たれた光が地球に届くのにかかる時間は何秒か？
- (c) 地球の北極と南極を通る周の長さは約 40000km である。このことから、地球の体積は太陽の体積の何倍であるか計算せよ。
- (d) ある天体の年周視差は $0.1''$ であったという。この天体までの距離は何 pc か？

第2章

天文学・宇宙物理学の基本概念 (2)

2.1 天体の明るさ・等級・色・位置・距離

2.1.1 明るさ

天文学では天体の明るさや色は重要な観測量です。天体の明るさや色の指標は天文学独特の表し方をするので要注意です。

まず明るさ (luminosity) または光度は単位時間あたりのエネルギー放出率です。

$$\text{明るさ} = \frac{\text{エネルギー}}{\text{時間}}. \quad (2.1.1)$$

これは仕事率でもあります。

統計力学によれば、温度 T の熱平衡にある物体はその温度に対応した黒体輻射を放射し、その単位時間単位面積あたりに放射されるエネルギー I は

$$I = \sigma T^4 \quad (2.1.2)$$

となります。これを Stefan-Boltzmann の法則といいます。 σ は Stefan-Boltzmann 定数です。したがって、半径 R の天体が温度 T の黒体輻射を放射するとすると、その明るさ L は

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (2.1.3)$$

と表されます。ここから、黒体輻射に限らず、 L と R に対して

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (2.1.4)$$

によって有効温度 T_{eff} を定義します。

2.1.2 絶対等級とみかけの等級

明るさ L から絶対等級 $\mathcal{M}$ を

$$\mathcal{M} = -2.5 \log_{10} \frac{L}{L_{\odot}} + \mathcal{M}_{\odot} \quad (2.1.5)$$

によって定義します。ここで $\mathcal{M}_{\odot} = 4.83$ は、太陽の絶対等級です。ここでわかるのは明るさが大きいほど絶対等級は小さいということです。明るさが 100 倍大きくなると絶対等級は 5 だけ小さくなります。^{*1}

つぎに見かけの等級です。見かけの明るさは観測される単位時間単位面積あたりのエネルギー流束 (flux) によって決まります。エネルギー流束を f とすると、

$$f = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (2.1.6)$$

です。見かけの等級 m は、 f を使って

$$m = -2.5 \log_{10} f + m_0 \quad (2.1.7)$$

としたもので定数 m_0 は、 m を先に定義した絶対等級 $\mathcal{M}$ を用いて、

$$m = \mathcal{M} + 5 \log_{10} \frac{r}{10 \text{ pc}} \quad (2.1.8)$$

となるように決めます。ここから、光源を $r = 10 \text{ pc}$ においたときの見かけの等級が絶対等級であるということがわかります。観測的には光源の見かけの等級 m と光源までの距離 r がわかれば絶対等級 $\mathcal{M}$ が計算できるという順番になります。 r は観測者から光源までの距離です。(2.1.6), (2.1.7), (2.1.8) から f と $\mathcal{M}$ を消去すると、

$$m = -2.5 \log_{10} \frac{L}{L_{\odot}} + 5 \log_{10} \frac{r}{10 \text{ pc}} + \mathcal{M}_{\odot} \quad (2.1.9)$$

が得られます。また光源が遠ければ遠いほど見かけの等級は大きくなります。太陽の見かけの等級は -26.74 です。

2.1.3 色指数

光源はいろいろな振動数 ν の光を発していますから、明るさ L を各振動数からの寄与 $L_{\nu} d\nu$ に分けて、

$$L = \int_0^{\infty} d\nu L_{\nu} \quad (2.1.10)$$

と書くことができます。この積分区間を $[\nu_{\text{imin}}, \nu_{\text{imax}}]$ とすれば、その区間からの寄与を

$$\tilde{L}_i = \int_{\nu_{\text{imin}}}^{\nu_{\text{imax}}} d\nu L_{\nu} \quad (2.1.11)$$

^{*1} なぜ明るいほど等級が小さくなるのかというと、それには天文学の歴史的な経緯が関係しています。昔の人は目視で夜空の星を見て、星を見た目の明るさの程度に応じて分類して 6 つのグループに分けました。そして 1 番明るいグループの星を 1 等星、2 番目に明るいグループの星を 2 等星、以下同様に、3 等星、4 等星、5 等星、6 等星と名付けました。したがって、6 等星は肉眼でぎりぎり見えるくらいの星たちグループの星ということになります。その後、科学が発達してくると、我々の目で見た場合、星の明るさはエネルギー流束の対数に対して線形的に感じられることがわかり、1 等星のエネルギー流束は 6 等星のおおよそ 100 倍であることがわかったので、(2.1.7) によって見かけの等級を定義することになりました。そのため、星の見かけの明るさが明るいほど見かけの等級は小さいのです。1 等星は明るさ 1 等賞のグループだということです。

と定義できます。^{*2}このようにして振動数帯を制限して得られた $\tilde{L}_i$ を絶対等級に直したものを、各振動数帯で振動数の高い方から低い方への順に、U, B, V, R, I, J などと表します。

そこで隣り合う帯域のうちの高振動数帯域の等級から低振動数帯域の等級を引いたもの、つまり、U-B, B-V, V-R, R-Iなどを色指数といいます。これらは値が大きいほど比較対象である2つの振動数域のうち低振動数側からの寄与が大きいので、「赤い」と言われます。このあたりはかなりややこしいので注意が必要です。太陽の場合、B-V=0.65で黄色に見えます。

2.1.4 位置と距離

観測者（自分）から見て天体がどの方向に見えるかを、観測者（地球）を中心とした仮想的な球面に天体が見える方向をあたかもそこに貼り付いているかのように角度で表すことが多いです。このときの仮想的な球面を天球または天球面といいます。地球の自転に伴って、天体の貼り付いた天球が、天の北極と南極（天の極を参照）を結ぶ軸の周りに自転と逆向きに（東から西へ）、1日にほぼ1回転するように見えます。

さまざまな天体の天球上の位置を正確に決めることを目的とする天文学を位置天文学といいます。天体の天球上の位置は望遠鏡の解像度を限界としてかなり正確に決めることができます。一般的には望遠鏡の解像度は非常に良いものでも秒から100ミリ秒程度です。

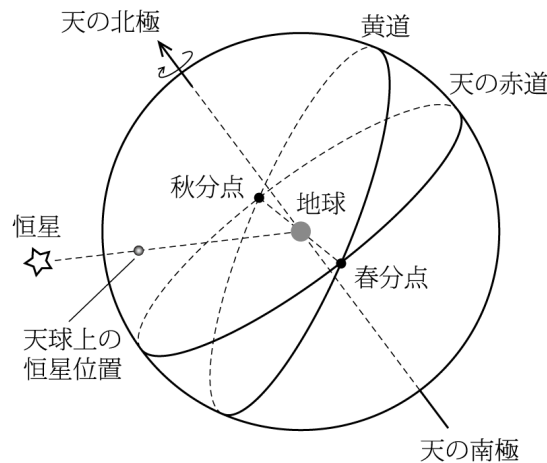


図 2.1 天球（天球面）[岡村・家・犬塚・小山・千葉・富阪編『天文学辞典』、シリーズ現代の天文学別巻（日本評論社）、p. 277]

一方、天体までの奥行き（距離）を正確に決めることは遥かに難しいです。既出の年周

^{*2} ただしこの説明は簡略化したもので、実際には i 番目の振動数帯に対応するフィルター $F_i(\nu)$ ($0 \leq F_i(\nu) \leq 1$) を用いて

$$\tilde{L}_i = \int_0^\infty d\nu F_i(\nu) L_\nu \quad (2.1.12)$$

と定義されます。

視差による方法は、天球上の位置を用いて幾何学的に距離を決めることができるので、最も信頼できる方法です。しかし、望遠鏡の解像度より年周視差が小さくなると使うことができません。この限界による距離の最大値は 300 pc くらいです。それより遠くの天体までの距離測定については、モデルを使ったさまざまな方法が提案されていて、その距離の大きさの程度に応じた測定方法をつないでいくので、距離梯子とされています。

2.1.5 演習問題

1. 全天で太陽を除いて最も明るい恒星はシリウスでその見かけの等級は -1.46 である。また年周視差約 380 ミリ秒が観測されている。
 - (a) シリウスまでの距離を求めよ。
 - (b) シリウスの絶対等級を求めよ。ただし $\log_{10} 3.8 \simeq 0.58$ を用いて良い。[ウィキペディアは間違っているかもしれません。]

2.2 天文学的観測手段

2.2.1 電磁波と波長

天文学ではいろいろな手段で観測を行います、なんと言っても最も古くから行われているのは電磁波によるものです。電磁波は光ですが、波長によって呼び方が変わります。また波長 λ の電磁波の角振動数 $\omega = 2\pi\nu$ は

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad (2.2.1)$$

で表されます。Einstein の光量子仮説の関係式を使うと、この波長の光に対する光子のエネルギーは

$$E = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} \quad (2.2.2)$$

で与えられます。

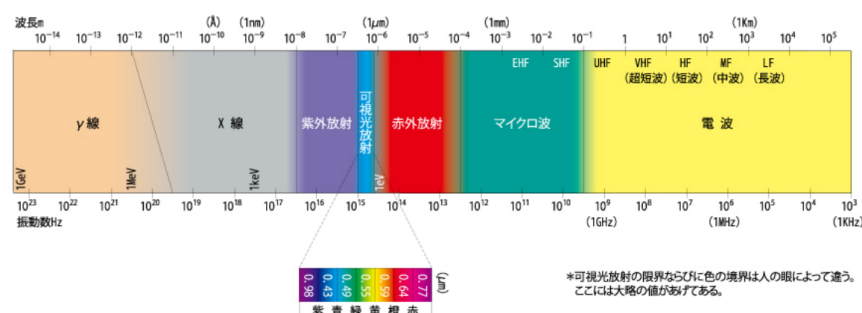


図 2.2 様々な波長の電磁波。出典: https://www.ushio.co.jp/jp/technology/glossary/material/attached_material_01.html

2.2.2 電磁波天文学

図 2.3 にあるように、紫外・可視・赤外と電波以外の波長では大気による激しい吸収を受けるので地上では観測できません。このため歴史的にはこれらの限られた波長で観測が行われてきました。

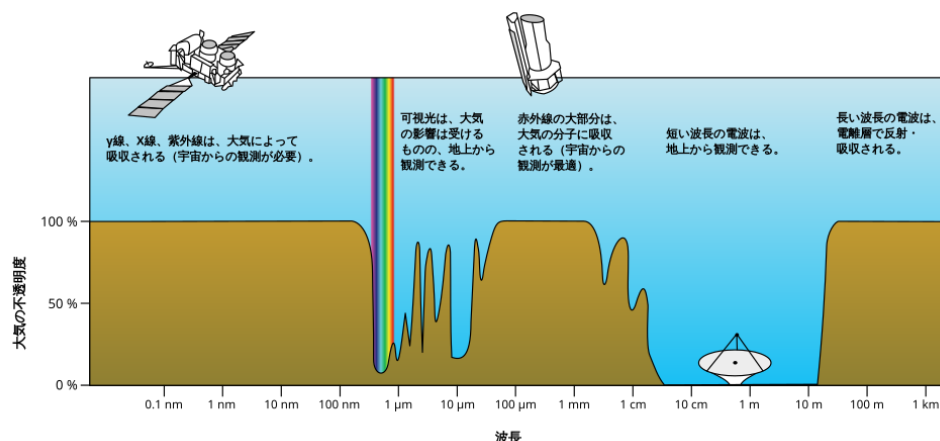


図 2.3 大気の不透明度 (Credit: NASA)

天文学は観測に用いる電磁波の波長によって次のように分類されます。

- 可視光・赤外線天文学

古くは目視で世界中で星の観測が行われていました。望遠鏡による天体観測は 1609 年に Galilei が木星の衛星を 4 つ発見したのが最初とされています。現在は口径 10~20m 級のすばる望遠鏡や VLT などの大型望遠鏡や、大気の影響を避けるために Hubble 宇宙望遠鏡やジェームズウェッブ宇宙望遠鏡のような宇宙観測も行われています。

- 電波天文学

1930 年代になって Jansky によって始められました。高解像度を得るためには D を大きくする必要があります。世界中のいくつかの電波望遠鏡を組み合わせる D を大きくする Very Long Baseline Interferometry (VLBI) によって非常に高い解像度が得られます。また、宇宙衛星に電波望遠鏡を積んで宇宙背景マイクロ波放射 (CMB) の精密観測が行われています。

- X 線・ガンマ線天文学

大気圏外に望遠鏡を置く必要があります。1960 年代に Giacconi らによって始められました。宇宙の高温ガスから発生される高エネルギー電磁波を捉えられるので、高エネルギー天文現象を調べるのに適しています。Giacconi は 2002 年にノーベル物理学賞を受賞しています。

2.2.3 望遠鏡の解像度

光（波）の回折という性質により、望遠鏡によってものを見る際にぼやけて見えてしまつて、2つの光源が2つの光源として見える限界の角度があります。望遠鏡による解像度は像を分解できる最も小さな天球上の角度 $\Delta\theta$ を用いて、波長を λ 、口径を D として

$$\Delta\theta \simeq 1.22^\circ \frac{\lambda}{D} \quad (2.2.3)$$

と表せます。これにより、高い解像度を得るためには、望遠鏡の口径が大きく、波の波長が短いものが有利であるということになります。

2.2.4 非電磁波天文学

電磁波以外の手段による天文学として、以下のものがあります。

- 宇宙線天文学

高エネルギーに加速されて地球に飛来する電子・陽子・原子核などを観測します。基本的に荷電粒子なので宇宙に存在する磁場によって曲げられてしまうので指向性が低いのが特徴です。 10^{20} eV といった超高エネルギー宇宙線も観測されていますが、その起源はよくわかっていません。

- ニュートリノ天文学

何らかの天体現象で放射されるニュートリノを観測します。1960 年代に Davis によって創始されたとされています。太陽から放射されるニュートリノが観測されニュートリノの質量が調べられました。1987 年に大マゼラン雲で爆発した超新星から放射されたニュートリノは日本の Kamiokande で観測され、小柴昌俊が Davis とともに 2002 年にノーベル物理学賞を受賞しました。

- 重力波天文学

重力波は 1916 年に Einstein が提案した一般相対論によって予言される時空の歪みが波として伝播する現象です。非常に長い年月をかけて観測が試みられていましたが、ついに 2015 年に LIGO によってブラックホール連星からの重力波が検出されました。この業績で 2017 年に Weiss, Barish, Thorne がノーベル物理学賞を受賞しました。現在は日本の検出器 KAGRA も参加し、LIGO 稼働中は毎日のように重力波が検出されています。

2.2.5 演習問題

1. Event Horizon Telescope は 1.3mm の波長の電波を用いて地球から 16.4 Mpc 離れた M87 という銀河の中心 M87* を観測し、質量 $6.5 \times 10^9 M_\odot$ のブラックホールの地平線半径 (約 120 au) 程度の構造を分解して撮像することに成功したと言われ

ている。つぎの問に答えよ。ただし数字は有効数字 1 桁で良い。

(a) 要求される解像度はどの程度か？

(b) Event Horizon Telescope の有効的な口径は何 m 程度だろうか？

2.3 素粒子の世界

2.3.1 Planck スケール

量子力学の Heisenberg の不確定性の関係

$$\Delta E \cdot \Delta t \gtrsim \frac{\hbar}{2} \quad (2.3.1)$$

から、短時間の現象あるいは短距離の現象は高エネルギー現象に対応します。その最たるものは、Planck スケールです。すでに見ましたが、 $m_{\text{Pl}} \simeq 10^{-5} \text{ g}$, $E_{\text{Pl}} \simeq 10^{19} \text{ GeV}$, $\ell_{\text{Pl}} \simeq 10^{-33} \text{ cm}$, $t_{\text{Pl}} \simeq 10^{-43} \text{ s}$ です。Planck 質量の Compton 波長は Planck 質量のものがブラックホールになった場合の半径 (Schwarzschild 半径) に等しいため、この質量の素粒子の量子力学を考えるとときにはその重力的效果が無視できない、あるいは重力的效果を考えるとときにはその量子力学的效果が無視できないということになります。つまり重力の量子論を知らなければならないということです。しかし我々は信頼に足る重力の量子論を知らないので、これが現代物理学が扱える最高エネルギーとみなされていて、宇宙物理学ではこれより高エネルギーを扱うのを避けることが常道になっています。

2.3.2 素粒子標準模型

次に我々に馴染みの深い原子核を構成する陽子・中性子を見てみましょう。これらはともに 1 GeV くらいの静止質量エネルギーを持っていて、質量にすると 10^{-24} g 程度です。中性子は電氣的に中性の粒子で単体では不安定で 15 分ほどで崩壊してしまいます。陽子は正の素電荷 e をもつ粒子で非常に安定であることが実験的に知られています。

この程度のエネルギーの物質の構造は素粒子標準模型でよくわかっています。図 2.4 は素粒子標準模型の粒子たちです。陽子や中性子はクォーク 3 つからなる複合粒子でバリオンと呼ばれるものの仲間です。陽子は uud で中性子は udd です。クォークは 3 世代 (6 種類) あって電荷を $2e/3$ または $-e/3$ を持っていてこれ以上分解できない素粒子ですが、単体で取り出すことはできません。

電子はおなじみの粒子ですが、これはエネルギーが 0.5 MeV 程度でレプトンと呼ばれる素粒子の仲間です。ニュートリノもレプトンの仲間で、非常に小さな質量を持っています。レプトンも実は 3 世代に分類されます。それからこれらの粒子に質量を与える上で重要な役割を果たすのが Higgs 粒子です。光子は他の W ボソン・Z ボソンとともに力を伝える働きをするゲージ粒子になります。

重力は素粒子標準模型には入っていないので、重力波あるいはそれを量子化したボソン

図 2.4 素粒子標準模型 (<https://commons.wikimedia.org/wiki/>)

の重力子（グラビトン）はこれとは別枠になります。

2.3.3 演習問題

- 次の問に答えよ。ただし数字は有効数字 1 桁で良い。
 - 陽子や中性子の質量は電子の質量の何倍か？
 - 熱平衡にある質量 m の粒子は、平均的に $E - mc^2 \simeq k_B T$ 程度のエネルギーをもつ。したがって、非常に高温であれば超相対論的粒子となり、非常に低温であれば非相対論的粒子として振る舞う。電子の場合、その境目となる温度は何 K だろうか？
 - 陽子や中性子の場合にはその温度は何 K だろうか？

2.4 天体の階層性

2.4.1 天体の階層性

次に天体の階層性を見ていきますが、ここでは概観するだけなので、小さいものから大きいものへと簡条書きでまとめておきます。

- 小惑星

結合力は重力よりも原子結合のほうが重要であるため、多くの小惑星は球形ではなく複雑な形状をしている。火星軌道と木星軌道の間にある小惑星帯に多数の小惑星が存在し、その典型的な大きさは 1 km から 100 km ほどだが、さらに小さいものはさらに多数あると見られる。

- 月（衛星）：太陽系にある最大の衛星である。

$$M \simeq 10^{-2} M_{\oplus} \simeq 10^{-8} M_{\odot}, \quad R \simeq (1/4) R_{\oplus}, \quad \rho \simeq 3.3 \text{ g/cm}^3 \quad (2.4.1)$$

- 地球（地球型惑星）

公転半径 1 au

$$M_{\oplus} \simeq 6 \times 10^{27} \text{ g} \simeq 10^{-6} M_{\odot}, \quad (2.4.2)$$

$$R_{\oplus} \simeq 6 \times 10^8 \text{ cm} \simeq 10^{-2} R_{\odot}, \quad (2.4.3)$$

$$\rho \simeq 5.5 \text{ g/cm}^3 \quad (2.4.4)$$

- 木星（木星型惑星）

公転半径 5 au

$$M_J \simeq 10^{-3} M_{\odot}, \quad (2.4.5)$$

$$R_J \simeq 10^{-1} R_{\odot}, \quad (2.4.6)$$

$$\rho \simeq 1.3 \text{ g/cm}^3 \quad (2.4.7)$$

- 太陽（恒星）：数ある恒星の中で最も典型的なものであることが知られている。

$$M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{33} \text{ g}, \quad (2.4.8)$$

$$R_{\odot} \simeq 7 \times 10^{10} \text{ cm}, \quad (2.4.9)$$

$$\rho \simeq 1.4 \text{ g/cm}^3 \quad (2.4.10)$$

自転周期は 30 日程度。恒星間の距離は pc 程度。

- 太陽系（惑星系）

図 2.5 のように、太陽・惑星・小惑星・彗星・Kuiper belt 天体・Oort の雲などからなる。ほとんどの質量は太陽が担っている。最も外側の海王星の軌道半径は 30 au 程度。Oort の雲は彗星の起源とされ $10^5 \text{ au} \simeq 1 \text{ pc}$ 程度広がっているとみられているが、その存在は観測的には確認されていない。

- 我々の銀河あるいは天の川銀河（銀河）

棒渦巻銀河に分類される。約 10^{11} 個の恒星からなり、 $L \simeq 10^{11} L_{\odot}$, $M \simeq 2 \times 10^{11} M_{\odot}$ 。回転しておりその回転速度は平均的には $\simeq 300 \text{ km/s}$ 程度。回転して 1 周するのに 10^8 yr 程度かかる。太陽は銀河中心から約 9 kpc のところにある。天の川中心は Sgr A* にあり、 $10^6 M_{\odot}$ 程度の超大質量ブラックホールが存在する。銀河はバルジ、円盤、腕、ハローといった構造があり、円盤の半径は 20 kpc 程度。ハローは 50 kpc 程度まで広がっていると見られる。銀河間の平均的な間隔は Mpc 程度。

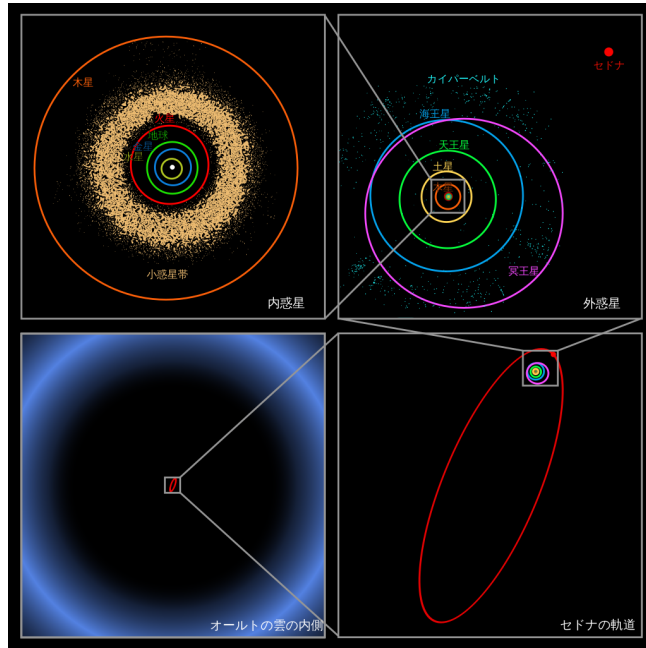


図 2.5 太陽系の構造 (NASA: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8c/>)

- 局所銀河群 (Local Group) (銀河群)
我々の銀河は 50 kpc 程度の距離に大マゼラン雲・小マゼラン雲を従えている。我々の銀河やそこから 7.7Mpc 離れたアンドロメダ銀河 (M31) を含む 50-60 個の銀河の集まりが局所銀河群である。
- 銀河団 (cluster of galaxies)
銀河団は数百から数万の銀河が集まったもので重力的に束縛されている。平均的な間隔は 10 Mpc 程度。Coma cluster, Virgo cluster などが有名。
- 超銀河団 (supercluster) ・大規模構造 (large-scale structure)
超銀河団や大規模構造というのは銀河の分布が 30 Mpc~100 Mpc のスケールの複雑なパターンをなしている。密度の薄いボイドとそれを取り囲むウォールからなる構造とも見られる。このスケールの構造は重力的に束縛されていない。
- 宇宙の地平線
宇宙膨張によって各銀河は我々から遠ざかっており、その後退速度 v は我々からの距離に比例する。

$$v = H_0 r. \quad (2.4.11)$$

この後退速度 v が光速 c に達する距離 r を宇宙の地平線という。定数 H_0 は Hubble 定数と言われる。その観測値は $H_0 = 100h \text{ km/s/Mpc}$ 、 $h \simeq 0.7$ であるので、地平線長 ℓ_H は

$$\ell_H = cH_0^{-1} \simeq 4 \left(\frac{h}{0.7} \right)^{-1} \text{ Gpc} \quad (2.4.12)$$

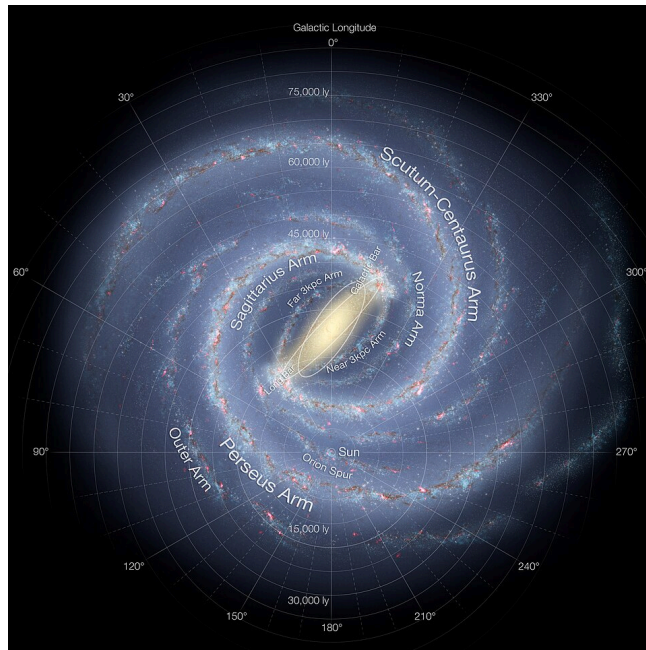


図 2.6 我々の銀河の構造の想像図 (NASA <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/12/>)

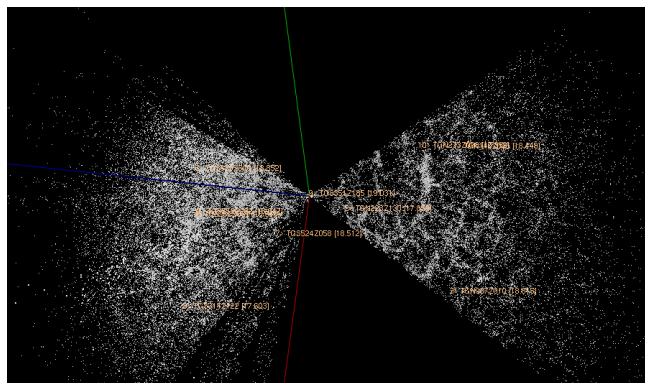


図 2.7 宇宙の大規模構造 (2DF Survey <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2dfgrs.png>)

と計算できる。

2.4.2 演習問題

1. 次の問に答えよ。ただし数字は有効数字 1 桁で良い。
 - (a) 太陽・木星・地球・月のうち比重がもっとも大きいものはどれか？
 - (b) 木星の公転周期は約何年だろうか？
 - (c) 太陽の角運動量は木星の角運動量の何倍か？

(d) H_0^{-1} は何秒か？またそれは何年か？

第3章

重力に関する基本的な現象

3.1 天体力学

3.1.1 運動方程式

ニュートン力学において図 3.1 に示すような 2 体問題は完全に解くことができます。これを解くのは 1 年生のときの力学で習ったと思いますが、おさらいです。ちなみに、1 年生のときに習うとはいえ、これを完全に解き切るのはかなり難しいです。

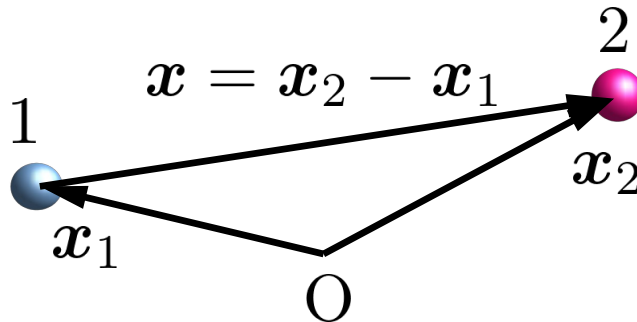


図 3.1 2 体問題

運動方程式は

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}, \quad (3.1.1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}. \quad (3.1.2)$$

となります。ここでドットは時間微分を表します。

運動を重心 $\mathbf{x}_c$ と相対位置ベクトル $\mathbf{x}$ に分けます。ここで

$$\mathbf{x}_c = \frac{m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.1.3)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \quad (3.1.4)$$

です。すると重心 $\mathbf{x}_c$ については

$$\ddot{\mathbf{x}}_c = 0 \quad (3.1.5)$$

が導かれるので、等速直線運動することがわかります。

相対位置ベクトルについては、

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{x} \quad (3.1.6)$$

が導かれます。ここで $M = m_1 + m_2$ は総質量です。

3.1.2 Kepler の第 2 法則

すると単位質量あたりの角運動量 $\mathbf{h} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$ は、(3.1.6) を用いると

$$\dot{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}} = 0 \quad (3.1.7)$$

となるので、保存することがわかります。 $\mathbf{x}$ も $\dot{\mathbf{x}}$ も $\mathbf{h}$ に垂直なので、 $\mathbf{x}$ は常に $\mathbf{h}$ に垂直な固定された平面上に存在します。 $\mathbf{x}$ が微小時間 dt で描く微小な三角形の面積 dS は

$$dS = \frac{1}{2} |\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}| dt \quad (3.1.8)$$

であるので、「面積速度」 V_S は

$$V_S = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}| \quad (3.1.9)$$

です。角運動量が保存することより、

$$h := |\mathbf{h}| = |\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}| = 2V_S = \text{一定} \quad (3.1.10)$$

であるので、面積速度 V_S は一定であることがわかります。これが Kepler の第 2 法則の内容です。

3.1.3 運動方程式の動径方向と角度方向への分解

$\mathbf{x}$ が存在する平面上で $\mathbf{x} = 0$ を中心とする極座標 (r, θ) をとると、自然な正規直交基底 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ をとることができます。これらはデカルト座標で

$$\mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta) \quad (3.1.11)$$

という成分を持っていて、

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r \quad (3.1.12)$$

であることに注意すると、

$$\mathbf{x} = (r \cos \theta, r \sin \theta) = r \mathbf{e}_r, \quad (3.1.13)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (3.1.14)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_\theta + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

となります。これを用いて (3.1.6) を r 成分と θ 成分に分解します。 θ 成分は

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (3.1.16)$$

となり、これを積分すると

$$r^2\dot{\theta} = h \quad (3.1.17)$$

が得られます。 h は (3.1.10) ですでに定義した定数です。(3.1.6) の r 成分は

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \quad (3.1.18)$$

となります。右辺を左辺に移項して両辺に $\dot{r}$ をかけて t で積分すると

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = E \quad (3.1.19)$$

が得られます。ここで E は積分定数でこれは力学的エネルギー 保存の法則です。

3.1.4 Kepler の第 1 法則

近星点や遠星点では $\dot{r} = 0$ となります。したがって、(3.1.19) から、 $r_{\min}$, $r_{\max}$ を近星点距離、遠星点距離とすると、 $1/r_{\min}$ と $1/r_{\max}$ は u に関する 2 次方程式

$$\frac{h^2}{2}u^2 - GMu - E = 0 \quad (3.1.20)$$

の 2 つの異なる解なので、解と係数の関係より

$$\frac{1}{r_{\min}} + \frac{1}{r_{\max}} = \frac{2GM}{h^2}, \quad \frac{1}{r_{\min}} \frac{1}{r_{\max}} = \frac{-2E}{h^2} \quad (3.1.21)$$

を満たします。

ここで、(3.1.18) から (3.1.17) を用いて t を消去し $u = 1/r$ とおくと、

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \quad (3.1.22)$$

という線形の非斉次二階微分方程式が得られます。この微分方程式を解き、その式から r を θ の関数として書くと、 $E < 0$ のとき

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}; \quad \ell = \frac{h^2}{GM}, \quad 1 - e^2 = \frac{-2Eh^2}{(GM)^2} \quad (3.1.23)$$

が得られます。ただし (3.1.21) を用い、積分定数は $\theta = 0$ のとき近星点 $r = r_{\min}$ となるようにとりました。また $0 \leq e < 1$ です。これは焦点が $r = 0$ 、離心率 e 、長軸半径 a が $\ell/(1 - e^2)$ の楕円の式です。これが、Kepler の第 1 法則です。この楕円を図示したのが図 3.2 です。

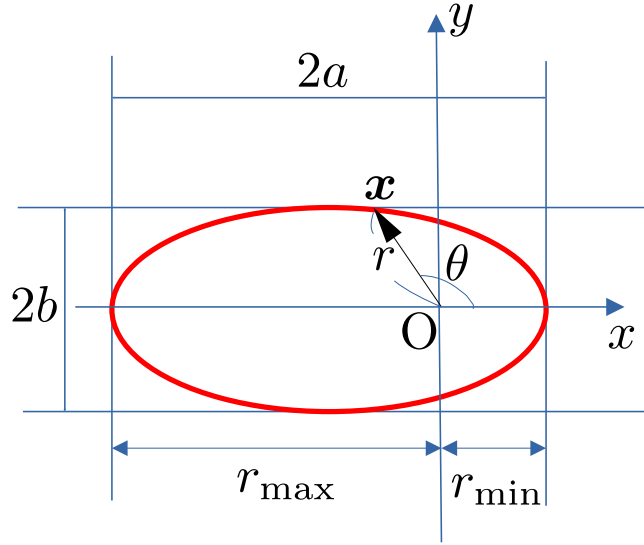


図 3.2 楕円

3.1.5 Kepler の第 3 法則

軌道周期を求めるには (3.1.19) で t を r 積分で表した後、 $[r_{\min}, r_{\max}]$ で積分したときの t の増分が周期 P の半分になることを使います。

$$r = a(1 - e \cos \psi) \quad (3.1.24)$$

とおくと、 $\psi = 0, \pi$ がそれぞれ近星点、遠星点にあたることがわかります^{*1}。積分変数を r から ψ に変換して積分を実行すると

$$\frac{1}{\sqrt{-2E}} a(\psi - e \sin \psi) = t + \text{const} \quad (3.1.25)$$

と積分を実行することができますから、周期として

$$P = \frac{2\pi a}{\sqrt{-2E}} \quad (3.1.26)$$

が得られます。 a を E と M で書き直すと、(3.1.21) から

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_{\max}} + \frac{1}{r_{\min}} \right) r_{\min} r_{\max} = -\frac{GM}{2E} \quad (3.1.27)$$

が得られます。この式から E を消去すると、

$$P = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \quad (3.1.28)$$

となります。つまり公転周期は長軸半径の $3/2$ 乗に比例するという Kepler の第 3 法則が得られたことになります。

^{*1} この ψ を離心近点角 (eccentric anomaly) といいます。



図 3.3 球状星団

3.1.6 演習問題

1. (3.1.18) と (3.1.17) から (3.1.22) を導け。
2. (3.1.19) に変数変換をおこなって積分することによって (3.1.25) を導け。
3. 地球の軌道パラメータから $GM_{\odot}$ を求めよ。

3.2 重力多体系

ニュートン力学では 2 体問題は完全に解き切ることができますが、3 体以上の問題では一般の解析解を得ることは困難です。さらに 3 体以上の問題では解はカオス的になり、僅かな初期条件の違いが時間発展とともに大きなずれに成長してしまうので、例えば数値シミュレーションを用いても系の時間発展を完全に正確に予測することは事実上困難です。

球状星団や楕円銀河や太陽系などの惑星系は、気体がほとんどなく、星とダークマターからなっていると考えられています。図 3.3 は球状星団の写真です。このような系では星やダークマター粒子は質点とみなすことができ、それらの質点同士が互いに重力を及ぼし合いながらある集団を形成していると考えられます。このような系を重力多体系といいます。我々の銀河のような棒渦巻銀河や銀河が多数集まった銀河団などは多くの気体を含んでいるので厳密には重力多体系ではありませんが、重力多体系が良い近似になる場合も多くあります。3 体以上の場合このような系の時間発展を完全に予測することは困難だとしても、我々は重力多体系の性質を巧妙な議論によって予測することができます。^{*2}

^{*2} 図 3.3 の出典: ESO, F. Ferraro (University of Bologna) - <http://www.eso.org/public/images/>

3.2.1 重力多体系とは何か

いま N 個の質点がお互いに重力のみを及ぼし合っているとしましょう。このとき、質点に $i = 1, \dots, N$ と番号をつけましょう。この系の Lagrangian は

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 + \sum_{i>j} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (3.2.1)$$

で与えられます。ここで、

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2, \quad (3.2.2)$$

$$U = U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_2) = - \sum_{i>j} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (3.2.3)$$

はそれぞれ運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーです。 i 番目の質点の運動方程式は Euler-Lagrange 方程式から

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} = - \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2} \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (3.2.4)$$

と求まります。このような Lagrangian で表される系を重力多体系といいます。この Lagrangian は時間に陽には依存しないので、エネルギー E が保存します。ここで

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 - \sum_{i>j} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = K + U \quad (3.2.5)$$

と表せます。

3.2.2 重力多体系の Virial 定理

最初に少し数学的な準備です。一般に n 変数関数 $f(y_1, \dots, y_n)$ が

$$f(\lambda y_1, \dots, \lambda y_n) = \lambda^p f(y_1, \dots, y_n) \quad (3.2.6)$$

を満たすとき、 f を p 次の斉次式であるといいます。このとき両辺を λ で微分して $\lambda = 1$ とおくと、

$$\sum_{k=1}^n y_k \frac{\partial f}{\partial y_k}(y_1, \dots, y_n) = p f(y_1, \dots, y_n) \quad (3.2.7)$$

が成り立ちます。これを斉次式に関する Euler の定理といいます。特に (3.2.3) からわかるようにポテンシャルエネルギー $U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ は、 $3N$ 変数の -1 次の斉次式ですから、

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} = -U \quad (3.2.8)$$

が成り立ちます。

さて重力多体系の問題に戻しましょう。まず、

$$\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i \cdot \ddot{\mathbf{x}}_i \quad (3.2.9)$$

という恒等式に注目すると、運動エネルギー K について、

$$2K = \frac{dG}{dt} - \sum_i \mathbf{x}_i \cdot m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \quad (3.2.10)$$

という関係式が得られます。ここで、

$$G := \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{x}_i \quad (3.2.11)$$

は Virial と言われる量です。(3.2.10) の右辺第二項に運動方程式 (3.2.4) を用い、さらに Euler の定理 (3.2.8) を用いれば、

$$2K = \frac{dG}{dt} - U \quad (3.2.12)$$

という非常に単純な式が得られます。(3.2.12) の両辺の時間 T での平均を考えると、

$$2\bar{K} = \frac{G(T) - G(0)}{T} - \bar{U} \quad (3.2.13)$$

と計算できます。ここで、

$$\bar{K} := \frac{1}{T} \int_0^T dt K, \quad \bar{U} := \frac{1}{T} \int_0^T dt U \quad (3.2.14)$$

です。Virial $G(t)$ は系の大きさが有限で粒子の速度も有限であれば有限値に収まるので、(3.2.13) の右辺第一項は $T \rightarrow \infty$ の極限で 0 に収束します。したがって、

$$2\bar{K} = -\bar{U} \quad (3.2.15)$$

が導かれました。これを重力多体系における Virial 定理といいます。

実際の現象では $T \rightarrow \infty$ という極限をとることはできないのですが、Virial 定理の導出からわかるように、十分長い時間 T に渡って Virial がある一定の範囲に収まっていれば Virial 定理が近似的に成り立ちます。このような重力多体系は Virial 平衡にあるといいます。Virial 平衡であっても、各質点は運動していますし、質点の位置分布も速度分布も時々刻々と変化します。また各質点の運動や質点の分布などが周期的である必要もありません。このように非常に弱い仮定で運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの時間平均の間に簡単な関係式が得られるのは非常に驚くべきことです。

さて全エネルギーの保存則 (3.2.5) と Virial 定理を組み合わせれば、

$$E = \bar{K} + \bar{U} = -\bar{K} \quad (3.2.16)$$

という関係式が得られます。明らかに $\bar{K} \geq 0$ ですから、

$$E \leq 0 \quad (3.2.17)$$

です。これは Virial 平衡にある重力多体系のエネルギーは一般に負であるということです。これは系が重力的に束縛されているということです。

さらに (3.2.16) から重力多体系の驚くべき性質が明らかになります。この式から、粒子の運動エネルギーが平均的に大きければ大きいほど、系のエネルギーが小さくなるということがわかります。逆に系のエネルギーが減少すれば、運動エネルギーが増加するという事です。系の運動エネルギーは「温度」に対応すると考えられるので、これは Virial 平衡にある重力多体系は温度が上がるとエネルギーが減少する、あるいはエネルギーが減少すると温度が上昇する、つまり比熱が負であると言ってもいいように思われます。このような言い方は「温度」をどのように定義するかという点に難しさがあります。しかし、少なくとも Virial 定理 (3.2.15) とそこから導かれる全エネルギーと運動エネルギーの関係 (3.2.16) は非常に弱い仮定から非常に一般的に成り立つ重力多体系の重要な性質です。

第 4 章

自己重力的流体力学

4.1 自己重力的完全流体

4.1.1 完全流体基礎方程式

物質場は簡単のため完全流体（または理想流体）として扱います。完全流体とは粘性のない流体のことです。 ρ , $\mathbf{v}$, P を密度、速度、圧力とします。これらは場なので、時間座標 t と空間座標 $\mathbf{x}$ の関数です。まず基礎方程式を提示します。

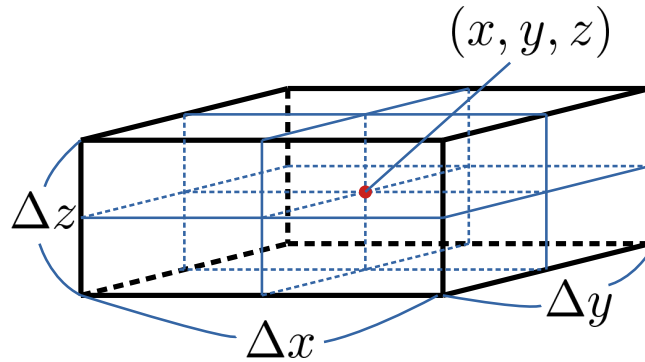


図 4.1 微小な直方体

まず微小な直方体にどのような力が働くか考えてみましょう。図 4.1 のように、中心を (x, y, z) とし x 軸、 y 軸、 z 軸に平行な辺の長さをそれぞれ Δx , Δy , Δz とする微小な直方体を考えます。

この直方体の z 軸に垂直な 2 つの面の面積はいずれも $\Delta x \Delta y$ であって、直方体の外側から直方体にかかる力は z 軸正の向きに

$$P\left(t, x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right) \Delta x \Delta y - P\left(t, x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) \Delta x \Delta y \simeq -\frac{\partial P}{\partial z}(t, x, y, z) \Delta z \Delta x \Delta y \quad (4.1.1)$$

です。他の面にかかる力も同様に計算できますから、直方体の表面に加わる力の合力は

$$-\nabla P \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.1.2)$$

と計算できます。これを圧力勾配力といいます。ここで

$$\nabla P = \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (4.1.3)$$

は圧力 P の勾配です。密度 $\rho(t, \mathbf{x})$ を用いると、この直方体の質量は $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$ ですから、単位質量あたりの圧力勾配力は

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (4.1.4)$$

です。これが圧力勾配力による加速度ということになります。

つぎに流体素片の加速度を考えます。時刻 t に位置 $\mathbf{x}$ にある流体素片の速度は $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ です。一方、この流体素片は微小時間 Δt 後に $\mathbf{x} + \mathbf{v}(t, \mathbf{x})\Delta t$ の位置にあり、そのときのこの流体素片の速度は $\mathbf{v}(t + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{v}(t, \mathbf{x})\Delta t)$ ですから、この流体素片の加速度は、

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{v}(t, \mathbf{x})\Delta t) - \mathbf{v}(t, \mathbf{x})}{\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (4.1.5)$$

と計算できます。したがって、流体素片の運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (4.1.6)$$

が得られます。これを Euler 方程式といいます。

次に質量の保存を考えます。直方体の z 軸に垂直な面から t から $t + \Delta t$ の間に直方体中に流入する質量は

$$\begin{aligned} & -(\rho v_z) \left(t, x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y \Delta t + (\rho v_z) \left(t, x, y, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y \Delta t \\ & \simeq -\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

であり、他の面からの流入も足せば、

$$-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (4.1.8)$$

となります。一方、直方体全体の質量の増分は

$$\rho(t + \Delta t, x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z - \rho(t, x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z \simeq \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (4.1.9)$$

となります。質量が保存するとするこの両者が等しいので、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.1.10)$$

が成り立ちます。これを連続の式といいます。

4.1.2 自己重力的完全流体基礎方程式

ここまで重力を考えませんでした、今度は流体自身の重力も考えていきましょう。重力ポテンシャルを Ψ とすると重力加速度は $-\nabla\Psi$ ですから、Euler 方程式の右辺にこの項を加えて

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Psi \quad (4.1.11)$$

が得られます。これも Euler 方程式といいます。連続の式は変更を受けません。重力ポテンシャルは物質の密度を源とする Poisson 方程式

$$\Delta \Psi = 4\pi G \rho \quad (4.1.12)$$

の解です。自己重力的完全流体力学は、(4.1.11), (4.1.10), (4.1.12) の 3 つの方程式によって定まる系です。

4.2 重力不安定性

銀河形成や星形成など宇宙の多くの構造形成は重力不安定性によって起こります。図 4.2 は宇宙論的なシミュレーションにおける構造形成の様子です。ここでは重力不安定性の基礎を学びます。

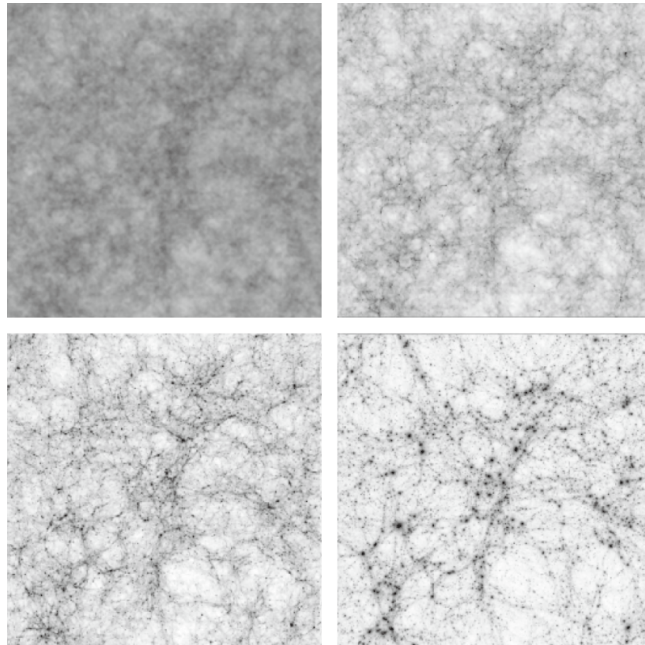


図 4.2 数値シミュレーションによって得られたダークマターの密度の非一様性が膨張宇宙の中で成長していく様子松原隆彦「構造形成論の基礎」、シリーズ現代の天文学第 3 巻、二間瀬・池内・千葉編『宇宙論 II』3 章 図 3.3 (日本評論社)

4.2.1 静的一様解からの摂動：自己重力なし

まず自己重力がない場合を考えます。方程式 (4.1.6), (4.1.10) には静的一様な解

$$\rho = \rho_0, \quad P = P_0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (4.2.1)$$

という解があることがすぐにわかります。

次にこの解から少しずれた解を

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad P = P_0 + \delta P, \quad \mathbf{v} = \delta\mathbf{v} \quad (4.2.2)$$

と書きます。ここで δ がついた量は非常に小さいと仮定します。このような量のことを一般に摂動といいます。これらの摂動を代表的に δQ と書きます。以下簡単のため、 $P = P(\rho)$ であると仮定します。このとき

$$\frac{\delta P}{\delta\rho} = \frac{dP}{d\rho} =: c_s^2 \quad (4.2.3)$$

と書いて c_s を音速といいます。いま $\delta\mathbf{v} = (\delta v_x, 0, 0)$ とし、摂動の時間・空間依存性を

$$\delta Q = Q_1 e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.2.4)$$

とすると、(4.1.6), (4.1.10) から、

$$\begin{pmatrix} -i\omega & ik\rho_0 \\ ik\frac{c_s^2}{\rho_0} & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ v_{x1} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.2.5)$$

が得られます。ここで

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ v_{x1} \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \quad (4.2.6)$$

であるとする、(4.2.5) の左辺の 2×2 の行列の行列式が 0 でなければなりません。これより

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 \quad (4.2.7)$$

が得られます。このような $\omega = \omega(k)$ の式を一般に分散関係式といいます。これは

$$\delta Q = Q_{1+} e^{ik(x - c_s t)} + Q_{1-} e^{ik(x + c_s t)} \quad (4.2.8)$$

という解が一般解として得られるということです。物理的にはこの実部をとって

$$\delta Q = C_{1+} \cos[k(x - c_s t) + \delta_+] + C_{1-} \cos[k(x + c_s t) + \delta_-] \quad (4.2.9)$$

という解が得られます。これは x 軸正の向きと負の向きに速さ c_s で伝播する波を表します。これは音波にほかなりません。

4.2.2 静的一様解からの接動：自己重力あり

さきほどと同じように静的一様解

$$\rho = \rho_0, \quad P = P_0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \Psi = \Psi_0 \quad (4.2.10)$$

から少しずれた解

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad P = P_0 + \delta P, \quad \mathbf{v} = \delta\mathbf{v}, \quad \Psi = \Psi_0 + \delta\Psi \quad (4.2.11)$$

を調べてます。すると、(4.1.11), (4.1.10), (4.1.12) から、

$$\begin{pmatrix} -i\omega & ik\rho_0 & 0 \\ ik\frac{c_s^2}{\rho_0} & -i\omega & ik \\ -4\pi G & 0 & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ v_{x1} \\ \Psi_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.2.12)$$

が得られます。ここで

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ v_{x1} \\ \Psi_1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \quad (4.2.13)$$

であるとする、(4.2.5) の左辺の 3×3 の行列の行列式が 0 でなければなりません。これより

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (4.2.14)$$

が得られます。これをプロットしたものが図 4.3 です。

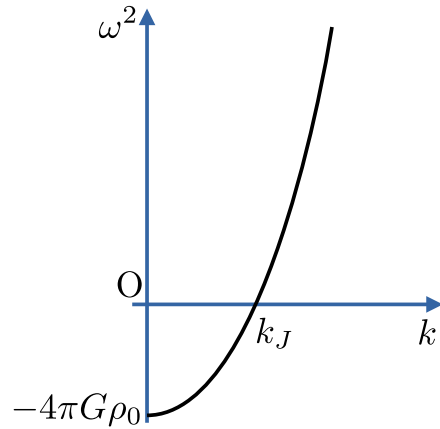


図 4.3 分散関係

4.2.3 Jeans 不安定性

(4.2.7) から、 $|k| > k_J$ で $\omega^2 > 0$, $0 < |k| < k_J$ で $\omega^2 < 0$ と言えます。ここで

$$k_J := \frac{\sqrt{4\pi G \rho_0}}{c_s} \quad (4.2.15)$$

とおきました。 $|k| > k_J$ のときは ω は実数ですから、これは x 軸方向に伝播する波になります。一方、 $0 < |k| < k_J$ では ω は純虚数で $\omega = \pm i\sigma$ ($\sigma > 0$) と書けます。すると、一般解は

$$\delta Q = C_{1+} e^{\sigma t} \cos(kx + \delta_+) + C_{1-} e^{-\sigma t} \cos(kx + \delta_-) \quad (4.2.16)$$

ですから、摂動は伝播せず、指数関数的に成長する解と指数関数的に減少する解の線型結合になります。十分時間が経つと、特別な初期条件の場合を除いて必ず成長解が卓越します。これは静的一様解には不安定性があるということです。これを Jeans 不安定性といいます。このとき

$$\sigma = c_s \sqrt{k_J^2 - k^2} \quad (4.2.17)$$

は成長率を表します。成長率は $k \rightarrow 0$ の場合に最大で、その成長時間は

$$t_{\text{grow}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho_0}} \quad (4.2.18)$$

と書けます。 σ は k の減少関数ですから、Jeans 不安定性では大きい波長から先に成長するということがわかります。 k_J に対応する波長 λ_J と質量 M_J

$$\lambda_J := \frac{2\pi}{k_J}, \quad M_J := \frac{4\pi}{3} \rho_0 \lambda_J^3 \quad (4.2.19)$$

をそれぞれ Jeans 長と Jeans 質量といいます。 $\lambda > \lambda_J$ すなわち $M > M_J$ が Jeans 不安定性の条件ということになります。^{*1}

^{*1} ここで紹介した Jeans 不安定性の説明は多くの教科書に書かれているものです。しかし根本的な問題があります。実は背景解として採用した静的一様密度分布は自己重力の完全流体の基礎方程式の解になっていないのです。これは Poisson 方程式 (4.1.12) を解いて Euler 方程式 (4.1.11) の右辺に代入してみればすぐわかります。摂動論では背景として採用するものが方程式の解になっていることが大前提です。そうでなければ摂動論は正当化できません。

実は一様密度の自己重力の流体は静止し続けることができず、膨張するか収縮するかします。各々の流体素片の位置ベクトル $\mathbf{r}$ は t の関数 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ に比例する形で

$$\mathbf{r}(t, \mathbf{x}) = a(t) \mathbf{x} \quad (4.2.20)$$

のように運動します。ここで $\mathbf{x}$ は各流体素片に付随する座標で共動座標といいます。 $a(t)$ と $\rho_0(t)$ は Euler 方程式 (4.1.11)、Poisson 方程式 (4.1.12)、連続の式 (4.1.10) から

$$\rho_0 \propto a^{-3}, \quad (4.2.21)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 - \frac{K}{a^2} \quad (4.2.22)$$

と求まります。ここで K は流体素片の力学的エネルギーに関係する定数です。これは一様宇宙に対応する解です。

一様膨張解を背景とした摂動論は、膨張宇宙における重力不安定性という宇宙の構造形成の観点から非常に面白い問題に対応します。これ以降の導出はこの授業で想定しているレベルを超えるので結果だけ提示しますが、

$$\delta := \frac{\delta \rho}{\rho_0}, \quad \delta = \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (4.2.23)$$

としたとき、

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{\mathbf{k}} - \left(4\pi G \rho_0 - \frac{c_s^2 k^2}{a^2}\right) \delta_{\mathbf{k}} = 0 \quad (4.2.24)$$

4.2.4 演習問題

1. (4.1.11), (4.1.10), (4.1.12) から、(4.2.12) を導け。
2. 星形成が起こりうる分子雲コアは主に水素分子 H_2 からなる。水素分子密度はおよそ 10^4 cm^{-3} 、温度はおよそ 10 K、大きさは 0.1 pc 程度、質量は太陽質量の 10 倍程度であるとする。重力不安定性は成長するだろうか？また成長する場合には、収縮が進む典型的な質量と時間（スケール）を求めよ。

4.3 球対称星の力学平衡

今度は太陽などの恒星や地球や木星などの惑星や月などの衛星や白色矮星や中性子星などのコンパクト星など、いわゆる星を考えてみましょう。これらの星は通常回転していますが、かなり球対称に近いので球対称性を仮定しましょう。

4.3.1 静水圧平衡

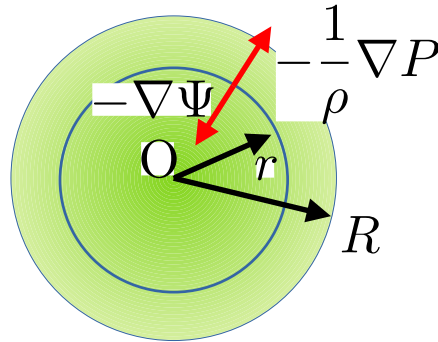


図 4.4 球対称星の静水圧平衡

図 4.4 のような恒星などの星の構造を考えます。この際、星を構成する物質は完全流体として扱います。圧力勾配力と重力が釣り合っているとすると、(4.1.11) から、

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Psi = 0 \quad (4.3.1)$$

という式が得られます。ここで、 $\mathbf{k}$ は共動座標 $\mathbf{x}$ における波数を表しています。(4.2.24) の左辺第二項は摩擦項の役割をします。この場合も、物理的な波長 $2\pi a/k$ がその時刻での Jeans 長 (4.2.19) を超えることが摂動が成長するための必要十分条件であることがわかります。成長は摩擦項のために指数関数よりも遅くなりますが、膨張率が十分小さいと認められる場合には膨張の効果は無視できて、静的背景解を用いて得られた結果が近似的に成り立ちます。

実は無限に一樣に広がった物質分布を扱うことはニュートン重力の適用範囲を超えており、一般相対論を適用しなければなりません。しかし一般相対論を適用した解析でも、地平線長より十分小さいスケールでは上に述べたニュートン重力の議論が成り立つことがわかっています。このように、静的一樣解の摂動解析は結果としてそれほど間違っていないということになります。

が成り立ちます。図 4.4 のように球対称性を仮定すると、 $P = P(r)$ であるので ∇P は r 成分しか持たず、

$$\nabla P = \frac{dP}{dr} \mathbf{e}_r \quad (4.3.2)$$

となります。一方、質量分布が球対称の場合、半径 r における重力はそれより内側にある質量 $m(r)$ がすべて原点にあるとしたときの重力に等しいという定理を用いると、重力加速度 $-\nabla \Psi$ も r 成分しか持たず、

$$-\nabla \Psi = -\frac{Gm(r)}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (4.3.3)$$

となりますから、

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \quad (4.3.4)$$

が成り立ちます。これを静水圧平衡の式といいます。

半径 r の内側にある質量 $m(r)$ は密度 $\rho(r)$ を体積積分して得られますから

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (4.3.5)$$

が成り立ちます。

4.3.2 静水圧平衡における Virial 定理

ここで図 4.4 のように、星の半径を R とし、質量を M としましょう。星の表面では圧力はゼロでないといけけないので、 $m(R) = M$ 、 $P(R) = 0$ です。(4.3.5) を用いて (4.3.4) の dr を dm で書き直すと

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (4.3.6)$$

が得られます。そこでこの両辺に $4\pi r^3$ をかけて m で区間 $[0, M]$ で積分します。すると

$$\int_0^M 4\pi r^3 \frac{dP}{dm} dm = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm \quad (4.3.7)$$

となりますが、右辺は重力エネルギー W になります。左辺は部分積分して (4.3.5) を使うと、

$$\text{LHS} = [4\pi r^3 P]_0^M - \int_0^M 12\pi r^2 \frac{dr}{dm} P dm = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm \quad (4.3.8)$$

が得られます。さらに星が非相対論的な理想気体からなると仮定すると、その状態方程式は

$$P = nk_B T = \frac{\rho}{\mu m_p} k_B T \quad (4.3.9)$$

です。ここで μ は平均分子量と呼ばれる量で、理想気体を構成する粒子一個あたりの質量数です。これより

$$\frac{P}{\rho} = \frac{k_B T}{\mu m_p} = \frac{RT}{\mu N_A m_p} = \frac{(C_p - C_v)T}{\mu N_A m_p} \quad (4.3.10)$$

となります。ここで R は気体定数であり、 C_p , C_V は定圧モル比熱、定積モル比熱です。また Mayer の関係式 $C_p - C_V = R$ を用いました。 $\mu N_A m_p$ は 1 モルあたりの質量ですから、

$$\frac{P}{\rho} = \frac{k_B T}{\mu m_p} = \frac{RT}{\mu N_A m_p} = (c_p - c_V)T = (\gamma - 1)c_V T \quad (4.3.11)$$

となります。ここで c_p , c_V は単位質量あたりの定圧比熱、定積比熱です。 $\gamma = c_p/c_V (> 1)$ とおきました。単原子分子理想気体の場合、 $C_p = (5/2)R$, $C_V = (3/2)R$ なので、 $\gamma = 5/3$ になります。

これらの結果を (4.3.7) に代入すると

$$3(\gamma - 1)E_{\text{int}} + W = 0 \quad (4.3.12)$$

が得られます。これを静水圧平衡における Virial 定理といいます。ただし

$$E_{\text{int}} = \int_0^M c_V T dm \quad (4.3.13)$$

は星の内部エネルギーの総和です。これより星の総エネルギー $E_{\text{tot}} = E_{\text{int}} + W$ は

$$E_{\text{tot}} = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} W \quad (4.3.14)$$

となるので、 $1 < \gamma < 4/3$ のときは $E_{\text{tot}} > 0$ となって重力的に束縛できないということになります。 $\gamma > 4/3$ の場合には $E_{\text{tot}} < 0$ となって重力的に束縛されることになります。

さらにここから面白いことがわかります。(4.3.12) と (4.3.14) から W を消去すると

$$E_{\text{tot}} = -(3\gamma - 4)E_{\text{int}} \quad (4.3.15)$$

となります。これは星からエネルギーが放射されて星の全エネルギーが減少すると、 $\gamma > 4/3$ のとき内部エネルギー E_{int} が増加するということになります。(4.3.13) から、星の質量は変化しないとすると内部エネルギーが増加するには星の温度が上昇するしかありません。つまりこの系ではエネルギーが失われると温度が上昇します。これは比熱が負であるということです。

最後に、 $\gamma = 5/3$ として、 E_{tot} を E , E_{int} を K , W を U と読み替えてみましょう。すると、静水圧平衡における Virial 定理は、自己重力多体系における Virial 定理に完全に対応することがわかります。単原子分子理想気体の静水圧平衡にある球対称な星では、内部エネルギーは分子の運動エネルギーの総和ですし、 W も分子のポテンシャルエネルギーの総和ですから、完全に一致すべきものです。したがって、単原子分子理想気体の静水圧平衡にある球対称な星は自己重力多体系の特別な場合とみなすことが可能です。

4.3.3 天体形成における冷却の重要性

温度 $T_i = 0$ の半径 R_i のガスが収縮して半径 R_f の平衡に達したとします。この過程でエネルギーを全く失わなかったとしましょう。単原子分子理想気体と仮定して $\gamma = 5/3$

とすると、(4.3.14) とエネルギー保存則から

$$E_{\text{tot}} = W_0 = \frac{1}{2}W \quad (4.3.16)$$

です。ここで例えば密度一定の球だとすると

$$W = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (4.3.17)$$

ですから、(4.3.16) は

$$-\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_i} = -\frac{1}{2} \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_f} \quad (4.3.18)$$

となります。これより、 $R_f = R_i/2$ が得られます。つまり収縮してももとの半分の半径にしかならず、密度も 8 倍にしかありません。これは冷却過程がなければガスが高密度に収縮することはないということを意味しています。

4.3.4 演習問題

1. 太陽は水素とヘリウムの理想気体からなる。太陽の質量と半径を用いて中心温度をオーダー評価せよ。ただし、微分をオーダー評価する際に

$$\frac{dP}{dr} \sim \frac{\Delta P}{\Delta r}, \quad \frac{dm}{dr} \sim \frac{\Delta m}{\Delta r}$$

のように微分を分子と分母の典型的な変化の比で置き換えて良い。

第5章

輻射と恒星

5.1 輻射

5.1.1 黒体輻射

温度 T の熱平衡状態にある物体はそれに応じた輻射を出します。これを黒体輻射といいます。振動数 ν と $\nu + d\nu$ の間にあるエネルギー密度を $U_\nu(T)d\nu$ とすると、調和振動子系に関する統計力学から

$$U_\nu(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (5.1.1)$$

と書けます。これを Planck 分布といいます。 $\beta = 1/(k_B T)$ は逆温度です。またこれは波長 $\lambda = c/\nu$ に対する分布 $U_\lambda(T)$ に直すと

$$U_\lambda(T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1} \quad (5.1.2)$$

と計算できます。これをプロットしたのが図 5.1 です。この分布のピークは $h\nu_{\text{peak}} \simeq$

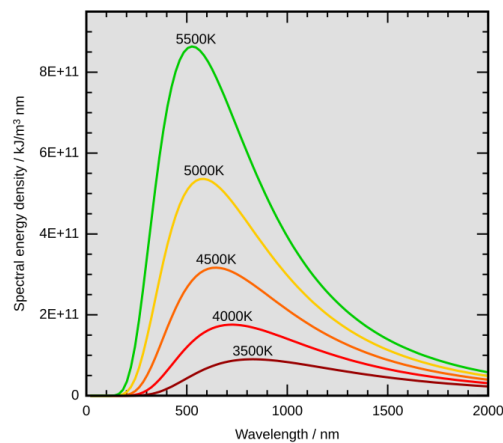


図 5.1 Planck 分布 (<https://commons.wikimedia.org/wiki/>)

$hc/\lambda_{\text{peak}} \sim k_B T$ となります。また $U_\nu(T)$ を積分すると Stefan-Boltzmann の法則が得

られます。

$$U(T) = \int_0^\infty d\nu U_\nu(T) = a_B T^4, \quad a_B = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3} \quad (5.1.3)$$

は Stefan-Boltzmann 定数です。 $U(T) \propto T^4$ は黒体輻射の状態方程式 $P = U/3$ と熱力学から導くことができますが、定数係数は統計力学を用いなければ得られません。

5.1.2 輻射場

一般の輻射場は黒体輻射とは限りません。位置 $\mathbf{x}$ で微小面積 dA に時間 dt の間に、単位ベクトル $\mathbf{n}$ の向きに立体角 $d\Omega$ で、振動数 ν から $\nu + d\nu$ までの輻射が入るとします。このエネルギーを $dE_\nu d\nu$ とすると

$$dE_\nu d\nu = I_\nu(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \cos \theta dA dt d\Omega d\nu \quad (5.1.4)$$

と書くことができます。ここで θ は $\mathbf{n}$ と微小面積 dA の法線がなす角を θ としました。球座標 (θ, ϕ) を用いると微小立体角 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ です。このとき $I_\nu(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ を specific intensity といいます。日本語では比強度といいます。これは、 $1 + 3 + 1 + 2 = 7$ 変数関数であり、この量が輻射場のすべての状態を決める基本量です。

エネルギー流束（フラックス） $\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}, t)$ とは、微小面積 dA を通過する単位時間単位面積単位振動数あたりのエネルギーであり、

$$\mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{A} = dA \int d\Omega I_\nu \cos \theta, \quad \mathbf{F} = \int \mathbf{F}_\nu d\nu \quad (5.1.5)$$

で与えられます。

エネルギー密度を U_ν とすると、 $\mathbf{n}$ 方向の光子による寄与は図 5.2 のような立体を考えることで、

$$dU_\nu d\nu dA c dt \cos \theta = I_\nu \cos \theta dA dt d\Omega d\nu \quad (5.1.6)$$

と評価できるので、

$$U_\nu = \int d\Omega \frac{I_\nu}{c}, \quad U = \int U_\nu d\nu \quad (5.1.7)$$

が得られます。

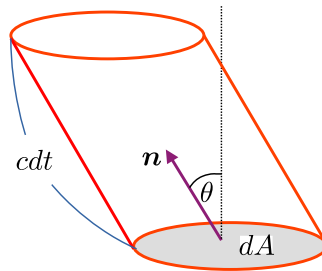


図 5.2 $I_\nu(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ の $U_\nu(\mathbf{x}, t)$ に対する寄与。

I_ν から輻射圧を計算することもできます。

$$(\text{圧力}) = \frac{(\text{面に垂直な方向の運動量移動})}{(\text{面積} \cdot \text{時間})} \quad (5.1.8)$$

であり、光子の場合 $\mathbf{p} = (E/c)\mathbf{n}$ なので、

$$P_\nu = \int \frac{(dE_\nu/c) \cos \theta}{dA dt} = \int \frac{I_\nu}{c} \cos^2 \theta d\Omega, \quad P = \int P_\nu d\nu \quad (5.1.9)$$

となります。

輻射場が等方の場合、 I_ν が $\mathbf{n}$ によらないので、

$$\mathbf{F}_\nu = \mathbf{0}, \quad U_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu, \quad P_\nu = \frac{4\pi}{3} \frac{I_\nu}{3} = \frac{1}{3} U_\nu \quad (5.1.10)$$

となります。特に黒体輻射は等方であり、その場合 $I_\nu = B_\nu(T)$ とおくと

$$B_\nu(T) = \frac{c}{4\pi} U_\nu(T), \quad B(T) = \int B_\nu(T) d\nu = \frac{c}{4\pi} U(T) = \sigma T^4, \quad (5.1.11)$$

$$\sigma = \frac{c}{4\pi} a_B = \frac{2\pi^4 k_B^4}{15c^3 h^3} \quad (5.1.12)$$

となります。これも Stefan-Boltzmann の法則といい、 σ を Stefan-Boltzmann 定数といいます。完全な黒体輻射は等方なのでフラックスはゼロですが、黒体の壁からの放射の場合は全立体角ではなくその半分だけの積分になるので、フラックスはゼロではなく壁に対して垂直外向きに

$$F_\nu = \pi B_\nu(T), \quad F = \pi B(T) \quad (5.1.13)$$

の大きさのフラックスを持ちます。

5.1.3 輻射輸送方程式

真空中では specific intensity は光線に沿って一定です。放射や吸収があるとその分の増減があって、光線にそって以下のような式に従います。

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \quad (5.1.14)$$

これを輻射輸送方程式といいます。ここで、 s は光線に沿った距離であり、 j_ν を放射係数、 α_ν を吸収係数といいます。

$$\tau_\nu = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(\tilde{s}) d\tilde{s} \quad (5.1.15)$$

を s_0 から s までの光学的厚さといいます。この光学的厚さが 1 になる距離 l_{mfp} つまり $l_{\text{mfp}} = \alpha_\nu^{-1}$ を平均自由行程といいます。これは光子が平均的に一回吸収（散乱）される長さです。 α_ν は長さの逆数の次元をもっています。

5.1.4 光学的に厚い場合

光学的厚さが 1 より十分大きい場合、光学的に厚いといいます。このような場合光子はその領域で何度も吸収と散乱を繰り返すので、ほぼ熱平衡にあると考えていいでしょう。すると輻射は黒体輻射と考えて、そのエネルギー密度は $U = a_B T^4$ であり、輻射圧は

$$P = \frac{1}{3} a_B T^4 \quad (5.1.16)$$

と書けます。ただし、その温度 T は場所によるとしましょう。このような状態を局所熱平衡といいます。完全な熱平衡ではないので、温度勾配によってエネルギー流束 $\mathbf{F}$ が発生します。簡単のためすべての振動数で積分した量を扱うことにして、その吸収係数を α とします。エネルギー流束 $\mathbf{F}$ による力が輻射圧の勾配による力だとすると

$$\frac{\alpha \mathbf{F}}{c} = -\nabla \left(\frac{1}{3} a_B T^4 \right) \quad (5.1.17)$$

となります。これより球対称な場合の半径 r における明るさは $L(r) = 4\pi r^2 F(r)$ は

$$L(r) = -\frac{16\pi c a_B T^3}{3\kappa \rho} \frac{dT}{dr} \quad (5.1.18)$$

と書けます。ここで $\kappa = \alpha/\rho$ は吸収係数を質量密度で割ったもので opacity といいます。opacity は単位質量あたりの散乱断面積でもあります。 κ は T, ρ の他に物質の化学組成などによって決まります。この式で温度分布が与えられたときのエネルギーの流れが計算できます。

5.1.5 演習問題

1. 荷電粒子による電磁波の散乱の古典極限を Thomson 散乱という。電子の Thomson 散乱の断面積は

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\alpha \hbar c}{m_e c^2} \right)^2 \simeq 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (5.1.19)$$

である。太陽内部の Thomson 散乱に対する平均自由行程を評価せよ。

5.2 恒星の構造と進化

5.2.1 恒星のエネルギーの流れ

太陽の中心付近は核融合反応によって非常に大きなエネルギーが生成されています。この大きなエネルギーによって多数の高エネルギー光子が放射されます。太陽の内部では光子の平均自由行程は約 $0.1 - 1 \text{ cm}$ ですから、太陽の光学的厚さは $\tau = R/l_{\text{mfp}} \simeq 7 \times 10^{10}$

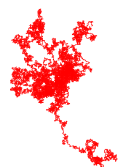


図 5.3 ランダムウォーク <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1962651>

です。この場合、図 5.3 のように、光子は太陽をまっすぐ突っ切ってくるのではなく、ランダムウォーク^{*1}して拡散しながらかなり長い時間をかけて太陽の外まで到達します。ランダムウォークでは散乱回数 N に対して拡散距離はだいたい $\sqrt{N}l_{\text{mfp}}$ です。この場合 (5.1.18) を使って輻射輸送によるエネルギーの流れを計算することができます。あとは表面からの放射に関する式

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4(R) \quad (5.2.1)$$

とエネルギーの生成に関する式

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon \quad (5.2.2)$$

によって決まります。 $\varepsilon = j/\rho$ は単位質量あたりのエネルギー生成率です。 ε は核融合反応によるもので、 T , ρ や物質の化学組成などによって決まります。恒星のエネルギー輸送は輻射輸送ではなく対流による輸送が支配的になる場合もあります。

恒星を作る材料は宇宙組成（水素 (H) とヘリウム (He) が重量比で 7:3) の気体（ガス）です。他に重い原子核が少しだけあります。これらは重元素あるいは比喩的に金属といえます。

核反応について簡単に見てみましょう。恒星の中心部分が高温高密度になると、まず水素が核融合を起こしヘリウムになります。



もっと詳しい反応の詳細の違いから、p-p chain と CNO cycle という 2 つの反応過程に区別されます。太陽質量程度では p-p chain が優勢ですが、太陽より重い星では CNO cycle が優勢になります。これは 26MeV の発熱反応なので大きなエネルギーが取り出せます。この反応が卓越している段階は主系列と呼ばれ、恒星はこの段階でその寿命の殆どを過ごします。

その後ヘリウムが核融合して炭素になる反応が起こります。



^{*1} ここでランダムウォークというのは、光子が原子と衝突するたびに散乱される方向がランダムに決まることです。ランダムウォークとして有名なのは、1827 年に Brown が発見した、水面に浮かぶ花粉が不規則に動く現象で、これは Brown 運動と呼ばれています。Brown 運動を引き起こしているのが熱運動する媒質の分子の不規則な衝突であることを提唱したのが 1905 年の Einstein の論文です。

ヘリウムが燃えたあと、星の中心部でさらに高温高密度状態が維持されると、炭素 (C) , 酸素 (O) , ネオン (Ne) , 珪素 (Si) , マグネシウム (Mg) が生成されて、最終的に鉄 (Fe) が生成されます。鉄は最も安定な (最もエネルギーの低い) 原子核なので、これ以上核融合は起こらなくなります。

圧力を決める式 $P = P(\rho, T)$ がないと式が閉じません。この式を状態方程式といいます。恒星でよく使われるのは理想気体としての圧力と輻射圧で圧力が構成されるというもので

$$P = \frac{k_B \rho T}{\mu m_H} + \frac{1}{3} a_B T^4 \quad (5.2.6)$$

です。 μ は平均分子量、 m_H は水素原子の質量です。

5.2.2 恒星進化の理論計算とその結果

実際に恒星の構造と進化を決めるには次のようにします。(5.2.6) のように適当な状態方程式を仮定して力学的平衡は静水圧平衡 (4.3.4) の式を解いて決めます。エネルギー輸送は (5.2.2) を解いて決めます。このもとで、各反応を解いてエネルギー生成率 ε を決めます。中心付近以外では $L(r)$ は r に依存しないで一定とみなせます。温度分布は (5.1.18) により定まります。これらがすべて矛盾のないように方程式系を解きます。核融合反応が進んでくると徐々に化学組成が変化します。この化学組成の変化や、それに伴う ε や κ の変化は非常にゆっくりしたものなので、準静的・準定常の仮定のもとで力学平衡とエネルギー輸送を解きます。そして、ゆっくりした時間変化を取り入れていきます。

ここまでの話で恒星の進化を追うことができますが、これらの式は数値的にしか解けません。ここはこれ以上深入りせずに、計算結果を説明します。まず主系列星の結果を概観します。

主系列では $4\text{H} \rightarrow {}^4\text{He}$ の反応が起こります。この反応は 26MeV の発熱反応なので、 $\eta \simeq 0.7\%$ 程度のエネルギー変換効率です。この変換効率で太陽の質量の 10 % が燃えるとするところ、ちょうど 100 億年という太陽の寿命が出てきます。寿命は大雑把に

$$\tau_{\text{life}} \simeq 10^{10} \text{yr} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{-1} \quad (5.2.7)$$

と評価できます。数値計算によるとおおよそ $R \propto M^{0.57}$, $L \propto M^{3.4}$ であるので、 $L \propto R^2 T_{\text{eff}}^4$ に注意すると、

$$\begin{aligned} R &\simeq 7 \times 10^{10} \text{cm} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{0.57}, & L &\simeq 4 \times 10^{33} \text{erg/s} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.4}, \\ T_{\text{eff}} &\simeq 6000 \text{K} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{0.55}, & \tau_{\text{life}} &\simeq 10^{10} \text{yr} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2.6} \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

であることがわかります。つまり、重い星ほど、大きく、明るく、高温で、短命です。恒星はその寿命のほとんどを主系列として過ごします。

次に星の質量による進化の分類を概観します。

- $M \lesssim 0.08M_{\odot}$: H が燃えないので主系列にならない。褐色矮星。
- $0.08M_{\odot} \lesssim M \lesssim 0.45M_{\odot}$: H が燃えて He コアの白色矮星が残る。
- $0.45M_{\odot} \lesssim M \lesssim 3M_{\odot}$: He も燃えて赤色巨星へ。CO コアの白色矮星が残る。
- $3M_{\odot} \lesssim M \lesssim 8M_{\odot}$: CO コアも燃焼する。その後 I 型超新星爆発？
- $8M_{\odot} \lesssim M \lesssim 12M_{\odot}(?)$: CO コアの燃焼のあと NeMg コアができる。これが電子捕獲して中性化し重力崩壊を起こし II 型超新星爆発し中性子星が残る。
- $12M_{\odot}(?) \lesssim M \lesssim 30M_{\odot}(?)$: NeMg コアの燃焼のあと Fe コアができる。吸熱反応である光分解が進んで重力崩壊を起こしブラックホールになる。
- $30M_{\odot}(?) \lesssim M$: 主系列が不安定。

5.2.3 Hertzsprung-Russel 図

まず本題に入る前に、黒体放射の温度と色指数の関係を考えましょう。以前に 5.1.1 節で、黒体放射のスペクトルが図 5.1 のようになることを見ました。それに、光を周波数帯に分けて測定する際につけるバンドフィルターの透過率を重ねたものが図 5.4 です。この

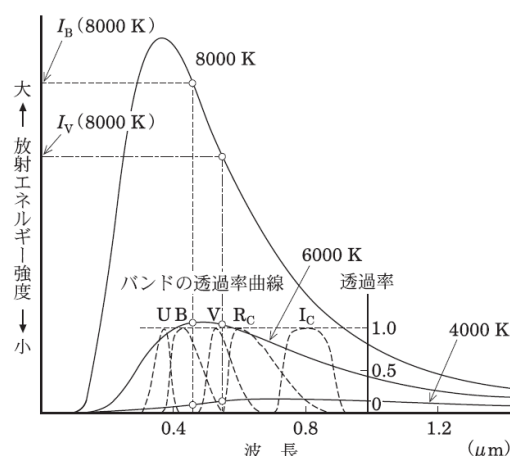


図 5.4 黒体放射と測光バンド [大朝由美子。工藤哲平「恒星の世界」、岡村、芝井、縣、他「すべての人の天文学」4 章図 4.5 (日本評論社)]

図からわかることは、B-V などの色指数は、黒体放射の温度に強く依存するということです。実際、温度が高くなると、短波長側の B バンドのエネルギーの寄与が長波長側の V バンドのエネルギーの寄与よりも相対的に大きくなるので、それらの等級の差である色指数 B-V は相対的に小さくなることがわかります。つまり、色指数は温度の指標であり、小さいほど温度が高く、大きいほど温度が低いのです。色指数が大きいものを赤い、小さいものを青いといいますので、青いほど温度が高く、赤いほど温度が低いということになります。これはその光源の明るさそのものには依存しません。

次に Hertzsprung-Russel 図 (HR 図) を説明します。この図は、観測された恒星を一つ一つ、横軸に色指数 (→温度)、縦軸に絶対等級 (→明るさ) をとったグラフにプロット

したものです。上が明るい下が暗い、右が赤い左が青いです。主系列星は左肩上がりの直線に大体沿った領域に分布します。その中でも左上は若くて青くて重い星、右下には赤くて軽い星が来ます。年老いた星は右下にあります。太陽は其中でちょうど真ん中くらいの位置にあります。右上には明るくて赤い星が来ますが、

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (5.2.9)$$

という関係から、そのような星は大きくないといけません。そこでここには赤色巨星と呼ばれるグループが来ます。左下には暗くて青い星が来ますがそのような星は小さくないといけません。そこでここには白色矮星と呼ばれるグループが来ます。HR 図は恒星の進化の理論でうまく説明できます。

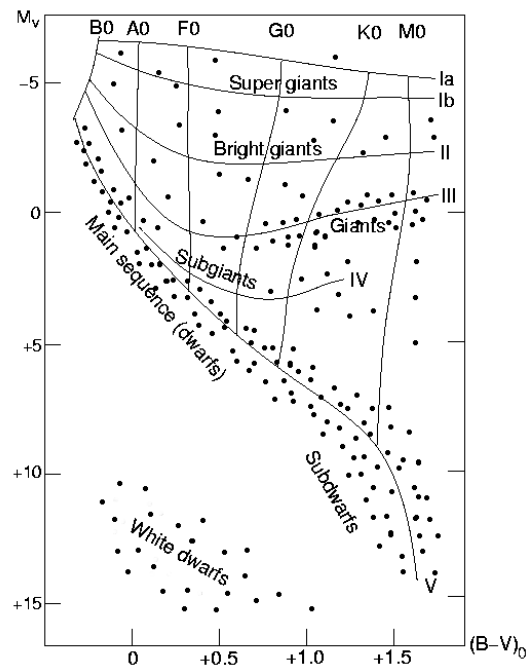


図 5.5 Herzprung-Russel 図 (<https://commons.wikimedia.org/wiki/>)

5.2.4 演習問題

1. 太陽中心で生成された光子が太陽表面に達するまでの時間を求めよ。
2. 鉄が原子核反応に対して最も安定な原子核であることを各種資料を調べて数値に基づいて説明せよ。

第 6 章

コンパクト星とブラックホール

6.1 白色矮星と中性子星

6.1.1 Fermi 粒子の縮退

白色矮星や中性子星などは Fermi 粒子の縮退圧によって支えられています。統計力学では、量子 Fermi 気体の縮退について詳しく勉強しますが、ここではこの現象を直感的に捉えましょう。

Heisenberg の不確定性原理により、粒子の運動量と位置の不確定性には

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (6.1.1)$$

という関係があります。これより一辺 L の立方体に閉じ込められた粒子は温度がゼロでも $p \sim \hbar/L$ の運動量を持ちます。粒子が非相対論的なときこの粒子の速度は $v \sim p/m$ であるので、この粒子による圧力 P は

$$P \sim \frac{p}{L^2 L/v} \sim \frac{p^2}{m L^3} \sim \frac{\hbar^2}{m L^5} \sim \frac{\hbar^2 n^{5/3}}{m} \quad (6.1.2)$$

と計算できます。ここで m は Fermi 粒子の質量、 n は Fermi 粒子の個数密度です。Fermi 粒子が超相対論的な場合は、 $v \sim c$ ですから、

$$P \sim \frac{p}{L^2 L/c} \sim \frac{pc}{L^3} \sim \frac{\hbar}{L^4} \sim \hbar c n^{4/3} \quad (6.1.3)$$

となります。このような圧力を縮退圧といいます。

ここで Fermi 粒子として原子核に付随していた電子を考えると、質量の殆どは核子によって占められます。電子一個あたりの核子数 μ_e という量を用いて、

$$\frac{\rho}{n_e} = \mu_e m_p \quad (6.1.4)$$

ですから、

$$P \sim \frac{\hbar^2}{m_e (\mu_e m_p)^{5/3}} \rho^{5/3} \text{ (非相対論的)}, \quad P \sim \frac{\hbar c}{(\mu_e m_p)^{4/3}} \rho^{4/3} \text{ (超相対論的)}, \quad (6.1.5)$$

という状態方程式が得られます。これらは温度に依存しません。通常の物質では、 $1 < \mu_e < 2$ です。次に中性子が縮退する場合を考えましょう。低温・高密度では、逆ベータ崩壊が進んで電子数が少なくなって中性子数が増えるので、電子縮退による縮退圧は考えなくてもよいものとします。この場合、非相対論的な場合は、

$$P \sim \frac{\hbar^2}{\mu_n^{5/3} m_p^{8/3}} \rho^{5/3} \text{ (非相対論的)}, \quad P \sim \frac{\hbar c}{(\mu_n m_p)^{4/3}} \rho^{4/3} \text{ (超相対論的)} \quad (6.1.6)$$

が得られます。ここで μ_n は中性子一個あたりの核子数で、 $1 < \mu_n < 2$ です。

6.1.2 限界質量

上で調べた Fermi 粒子の縮退圧はいずれも

$$P = K \rho^\gamma \quad (6.1.7)$$

という形に書けます。このような状態方程式の場合の球対称星の静水圧平衡の解は数値的に詳しく調べられていますが、ここでは解析的にオーダー評価してみましょう。ただし、微分をオーダー評価する際に

$$\frac{dP}{dr} \sim \frac{\Delta P}{\Delta r}$$

のように微分を分子と分母の典型的な変化の比で置き換えて良いことに注意しましょう。(4.3.4) と (4.3.5) で左辺と右辺をオーダー評価すると、

$$\frac{1}{\rho} \frac{K \rho^\gamma}{R} \sim \frac{GM}{R^2}, \quad \frac{M}{R} \sim 4\pi \rho R^2 \quad (6.1.8)$$

となります。ここでオーダー評価においては、 M, R, ρ はそれぞれ m, r, ρ の典型的な値ですが、星の質量、半径、平均密度とみなして良いでしょう。これらから R を消去すれば、大きさ 1 の無次元定数を除いて、

$$M \sim \left(\frac{K}{G} \rho^{\gamma-4/3} \right)^{3/2} \quad (6.1.9)$$

という式が得られます。

これより、 $\gamma > 4/3$ の場合には密度が高いほど質量の大きな星になるのですが、 $\gamma = 4/3$ の場合には質量は密度に依存せず一定で、その値は

$$M \sim \left(\frac{K}{G} \right)^{3/2} \quad (6.1.10)$$

となることがわかります。これより、超相対論的な電子の縮退の場合、超相対論的な中性子の縮退の場合は、それぞれ

$$M \sim \mu_e^{-2} \frac{m_{\text{Pl}}^3}{m_p^2} \sim \mu_e^{-2} M_\odot, \quad (6.1.11)$$

$$M \sim \mu_n^{-2} \frac{m_{\text{Pl}}^3}{m_p^2} \sim \mu_n^{-2} M_\odot \quad (6.1.12)$$

となります。この最大質量は星を支える圧力を提供する Fermi 粒子の質量によらないことに注意してください。この質量を超える質量では、縮退圧では重力を支えきれないということになります。

4.3.2 節で議論したように、相対論的な Fermi 粒子の縮退圧である $\gamma = 4/3$ は、星が重力的に束縛されるかどうかの臨界的な値です。このような場合の星は、ここで無視をした電磁気学的効果や一般相対論的重力の効果のために不安定になることが知られています。

6.1.3 白色矮星と Chandrasekhar 質量

電子の縮退圧によって支えられた星が白色矮星です。超相対論的な電子の縮退の場合、詳細な数値計算をすると、最大質量として

$$M \simeq \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-2} \times 1.45 M_{\odot} \quad (6.1.13)$$

が得られます。これを Chandrasekhar 質量といいます。Chandrasekhar はこれを始めとする一連の業績でノーベル物理学賞を 1985 年に授与されています。

白色矮星はシリウスの伴星として発見されました。古くからシリウスの軌道のふらつきが知られており、Kepler の第 3 法則から推定されたその質量は $0.98 M_{\odot}$ でした。1926 年ごろになってその伴星が見えたのですが、その明るさと色から半径は 5000 km と推定され、密度が 10^6 g/cm^3 であり、地球程度の大きさの星が太陽程度の質量をもつと推定されました。これは電子が縮退する密度に対応していて、白色矮星と同定されました。

6.1.4 中性子星とパルサー

電子の縮退圧でも星が支えきれずさらに高密度になって今度は中性子の縮退が起こってその圧力で支えられた星が中性子星です。中性子星は Baade と Zwicky によって 1934 年に予言されました。1939 年に Oppenheimer と Volkoff は理想 Fermi 気体の理論を使って一般相対論的に中性子星の構造を調べました。

ここで陽子と中性子はベータ平衡にあります。ベータ平衡というのは次のような反応の平衡状態のことです。

$$p + e^- \leftrightarrow n + \nu_e \quad (6.1.14)$$

この反応は $(m_n - m_p)c^2 \simeq 1.3 \text{ MeV}$ 程度の吸熱反応です。中性子の縮退によるエネルギー (Fermi エネルギー) がこれを超えてくると平衡が右に進んで中性子過剰の状況が実現します。この場合 $\mu_n \sim 1$ になるので、限界質量は $\sim 3 - 4 M_{\odot}$ 程度であることが予想されます。

しかし、非相対論極限では

$$E_F \simeq \frac{p_F^2}{2m_p} \quad (6.1.15)$$

であるので、この条件は中性子間の平均距離が $d \sim 1 \text{ fm}$ であるということになります。これは物質の密度が原子核の密度にほぼ等しいということです。この核力を考慮した高密

度物質の状態方程式が中性子星の構造を決める上で非常に重要です。この状態方程式は量子色力学 (QCD) によって計算できるはずですが、現在のところ低温高密度での物質の状態方程式を理論的に決定できていません。一般的には、中性子星の半径は 15 km 程度で最大質量は $3M_{\odot}$ 程度より小さいと考えられています。

観測的には 1967 年に Bell と Hewish が非常に正確な周期 (1.3373011s) の電波パルスを発する天体を発見し、パルサーと名付けました。1974 年に Hewish はノーベル物理学賞を受賞しました。その後周期が 1 ms 程度のものも発見されました。これらが天体の自転によるものとする、星が重力で束縛され遠心力で飛び散らないためには非常に高密度な天体でなければならないという結論に達します。このため、パルサーは中性子星であると同定されました。

中性子星同士が連星を組むと、徐々に重力波を出しながら公転半径が小さくなって公転周期が短くなり、最後には強い重力波を出して合体します。この際、この連星のどちらかでもパルサーとして観測されていれば、軌道に関する情報が詳細にわかります。このようなパルサーとして PSR1918+16 が発見され、Hulse と Taylor は 1975 年に重力波放射を含む一般相対論の検証が行い、1993 年にノーベル物理学賞を授与されています。また 2017 年には中性子星連星からの重力波が GW170817 として直接観測され、ほぼ同時にガンマ線バーストが Fermi 衛星によって GRB170817A として観測されたことで、中性子星連星の合体がガンマ線バーストになるということが観測的に検証されました。

6.1.5 演習問題

1. 白色矮星において縮退している電子が非相対論的であるときと超相対論であるときの境目の密度は何 g/cm^3 だろうか？また、中性子星ではどうか？
2. 周期 1 ms のパルサーが発見されたとする。この周期が星の回転周期に対応とした場合、星の密度に対してどのようなことが言えるだろうか？

6.2 ブラックホール

6.2.1 一般相対論の概要

ブラックホールを理解するにはどうしても一般相対論が必要です。しかも、単に重力の法則がニュートン重力の逆二乗則からずれるといった表面的なことではなく、根本的な理解が必要になります。一般相対論は 1915-1916 年に Einstein によって提案された重力を含む時空に関する一般理論です。詳細はここでは述べませんが^{*1}、大まかな考え方を見ておきましょう。

^{*1} 一般相対論の修得には曲面の幾何学の理論を高次元に一般化した Riemann 幾何学という数学が必要です。これまでその知識をほとんど必要としていなかった物理学科の学生には、これを修得するにはそれなりの時間が必要です。ここではそのための時間がとれないので、一般相対論入門に譲ります。

Einstein は、特殊相対論において重要であった慣性系が、重力の存在下では局所的にしかとれないことに気づきました。これは、有名な自由落下するエレベーターの思考実験です。エレベーター内の人が手に持ったりんごを静かに放すとどうなるかという、エレベーターに静止している座標系では静止したままです、これは慣性系になっているようです。しかし図 6.1 から分かるように、エレベーターの大きさを考慮すると、2つのりんごの間に相対的な加速度が生じるので、慣性の法則が成り立たなくなってしまいます。そこで

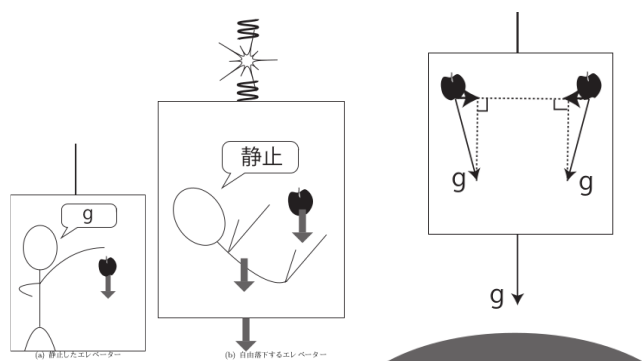


図 6.1 地球重力場中では、自由落下するエレベーターは局所的には慣性の法則が成り立つが、大きさを考慮すると重力が一樣でないために慣性の法則が成り立たない。
(Credit: 原田知広・宮本雲平)

特殊相対性原理

1. すべての慣性系において、物理法則は同一である。
2. すべての慣性系において、真空中の光速は一定である。

を一般化して、次の一般相対性原理

一般相対性原理

1. すべての局所慣性系において、物理法則は同一である。
2. すべての局所慣性系において、真空中の光速は一定である。

を指導原理としました。局所慣性系とは自由落下する観測者に静止した局所的な座標系のことです。局所慣性系において物理法則が同一であるためには、すべての物質は同一の重力加速度を受けていなければならない、これは銅も鉛も鉄も同じ重力加速度を受けるということから等価原理です。^{*2}

Einstein は、重力とは時空の曲がりによって引き起こされるものであると考えました。そして、Riemann 幾何学という曲がった空間に関する数学を我々が生きている 4 次元時空に適用しました。曲がった時空を表す量が計量テンソルと呼ばれる場です。Einstein

^{*2} ニュートン重力においては、等価原理はすべての物体において重力質量が慣性質量に同じ比例係数で比例するからであって、それ以上の説明はありませんでした。

は、力の働いていない物体は曲がった時空中をまっすぐ進むものとししました。このような曲線を測地線といいます。そして重力場を決める方程式として、Einstein は理論が適切な Newton 極限を持つことと、最も単純であることも要請しました。こうして得られた重力場の方程式は Einstein 方程式と呼ばれています。

以上をより正確な言葉でまとめると次のようになります。

一般相対論の基本的仮定

1. 試験粒子は時空の測地線に沿って運動する。
2. 時空の計量テンソルは Einstein 方程式に従う。

一般相対論は宇宙全体からブラックホール・初期宇宙に至るまで、どんなに強い重力場も光や光速に近い速度で運動する物体にも適用できる、非常に適用範囲の広い重力理論です。これまで多種多様な検証実験が行われており、すべての実験結果は誤差の範囲内で一般相対論を支持し、一般相対論が誤っていることを示す実験結果はこれまで一つもありません。一方で、一般相対論は重力の古典理論^{*3}であり、重力が持つであろう量子論的な効果を記述することはできません。重力の量子化は非常に難しいテーマであり、まだいかなる理論も成功したとは言えない状況です。

6.2.2 Schwarzschild 解

特殊相対論でも登場する Minkowski 時空は平坦な 4 次元時空であり、その線素（微小な線分の長さ）はデカルト座標 t, x, y, z または球座標 t, r, θ, ϕ を用いて、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (6.2.1)$$

$$= -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.2.2)$$

と表せます。これは Einstein 方程式の真空解ですが、自明な解とみなせるでしょう。

Einstein 方程式の非自明な解のうち最初に見つかったのが 1916 年に Schwarzschild によって発見された Schwarzschild 解で、その線素は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.2.3)$$

で与えられます。この解は静的球対称真空解です。ここで r_g は長さの次元をもつ積分定数で、Schwarzschild 半径と呼ばれています。

一般に、線素 ds^2 と計量テンソル $g_{\mu\nu}$ とは、座標 x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) の微小変位 dx^μ を用いて、

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6.2.4)$$

^{*3} 1960 年代くらいまでに出版された本では、ニュートン力学に基づく理論と相対論的な理論を対比して前者のことを古典的と呼んでいたようですが、現代ではこのような用語法は完全に時代遅れです。現代物理学では、古典的という語は量子化されていないという意味で使われ、その意味でしか使われません。

という関係で結びついています。 $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$ ととれば、 $g_{\mu\nu}$ は、(6.2.2) の場合には、

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta \quad (6.2.5)$$

となり、それ以外の成分はすべてゼロになります。(6.2.3) の場合には、

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \quad g_{11} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta \quad (6.2.6)$$

となり、それ以外の成分はすべてゼロになります。ニュートン極限の議論から、質量を M とすると、

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (6.2.7)$$

と表すことができます。すなわち、Schwarzschild 解は質量 M だけで決定されます。Schwarzschild 解は $r \rightarrow \infty$ で Minkowski 時空という平坦な時空に近づきます。このような性質を持つ時空を漸近的に平坦であるといいます。

Schwarzschild 時空の計量では $r = r_g$ が非常に特別な役割を果たします。 $r = r_g$ はこの座標では計量テンソルが特異になってしまうのですが、これは座標が良くないだけで別の座標をとればこの特異点は回避することができ、 $0 < r < r_g$ に拡張することができます。このような特異点を座標特異点といいます。

座標を取り替えて新たに $r = r_g$ でも正則であるような時空をとると、 $r = r_g$ は動径方向^{*4}外向きの光の経路になっていることがわかります。 $0 < r < r_g$ の領域ではどんな光でも r_g の外側に出ることができず、もちろん無限遠まで達することはできません。このため $r < r_g$ の領域は無限遠の観測者が原理的に観測できない領域となっており、この領域のことをブラックホールといい、 $r = r_g$ を事象の地平線といいます。^{*5}

$r = 0$ でも計量が特異的ですが、これは座標のとり方によらずに現れる特異点です。このような特異点を時空特異点といいます。

この計量において測地線を考えることで、光や有質量粒子がどのような経路を取るのかが決まります。この時空には光の円軌道が存在し、それは不安定円軌道であり、その半径は $r = (3/2)r_g$ です。この半径の球を光子球といいます。有質量粒子の場合は、 $r > 3r_g$

^{*4} $\theta = \text{一定}$ かつ $\phi = \text{一定}$ を満たす方向という意味です。

^{*5} 「ブラックホール=光が逃れられない領域」ととらえてブラックホールをニュートン力学で説明する方法があるので、一応ここで紹介します。ニュートン力学では、質量 M ・半径 R の星からの、粒子の脱出速度 v は力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R} = 0 \quad (6.2.8)$$

によって得られます。ここで $v = c$ とすれば、

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad (6.2.9)$$

と Schwarzschild 半径が得られます。つまり光が脱出できるぎりぎりの半径が Schwarzschild 半径というわけです。一般相対論の観点から見ると上の説明はいろいろな点で間違っていますが、 G , M , c から長さの次元をもつ量を与えるとそれは Schwarzschild 半径の次元しかないということではあります。

には安定円軌道が存在しますが、それより内側には存在しません。 $r = 3r_g$ は最内安定円軌道の半径にあたります。

Schwarzschild 解は Einstein 方程式の静的球対称な真空解として一意的であることが知られています。その後、1968 年になって Kerr が回転するブラックホール解を発見しました。Kerr 解は漸近的に平坦な定常軸対称な真空ブラックホール解として一意的であることが知られています。Kerr 解は質量と角運動量に関するパラメータ M と a だけで完全に決定されます。

物体が非常にコンパクトになると自らの圧力で支えきれなくなって重力崩壊を起こします。Penrose は 1965 年に、重力崩壊が起こると一般には時空特異点がどうしても現れてしまうという定理（特異点定理）を証明し、その場合ブラックホールができることを予想しました。2020 年に特異点定理とその他の関連する業績に対してノーベル物理学賞が授与されました。

ブラックホールは素粒子論分野で量子重力や統計力学・量子情報との関係で非常に注目されていて、そこでは天体というよりはむしろ面白い性質をもつ Einstein 方程式の解として捉えられています。しかし、ここでは天体としてのブラックホールを次節で見たいでしょう。

6.2.3 演習問題

1. $r_g = 2GM/c^2$ が長さの次元をもつことを確かめよ。

6.2.4 天体としてのブラックホール

前節でブラックホールは観測できないということを見ましたが、天文学者はブラックホールを観測していると主張しています。なぜこのようなことになるかということ、天文学者はブラックホールという言葉で一般相対論研究者よりも曖昧な意味で使っているからのようです。ブラックホールの観測手段として現在のところ可能なものは、以下のようなものあるいはこれらの組み合わせがあるでしょう。

- ブラックホール周辺の恒星などの天体を電磁波天文学によって観測し、中心天体が非常に重くしかも暗く非常にコンパクトであることを示し、中心にあるブラックホールに関する情報を得る。
- ブラックホール周辺の降着流などの高温気体が発する電磁波放射を、電磁波天文学によって観測し、その中心にあるブラックホールに関する情報を得る。
- ブラックホールの背後にある光源がブラックホールによる重力レンズを受けて位置が変化したり像が歪んだり増光を受けたりするのを電磁波天文学によって観測し、中心にあるブラックホールに関する情報を得る。
- ブラックホール同士の連星の合体によって放射される重力波を観測し、その波形か

ら、ブラックホールの合体であることを推定し、ブラックホールに関する情報を得る。

- ブラックホールとコンパクト天体の連星によって放射される重力波を観測し、その波形から、ブラックホールとコンパクト天体の合体であることを推定し、ブラックホールに関する情報を得る。
- ブラックホール連星の合体によって放射される重力波を観測し、その波形から、合体後に形成されたブラックホールの減衰振動によって放射される重力波を観測し、ブラックホールに関する情報を得る。

例えば、図 6.2 は、イベント・ホライズン・テレスコープによるブラックホールの撮像とされる写真ですが、ブラックホール周辺にある降着流の高温気体が発する電磁波が、ブラックホール周辺の強い重力場の影響で曲げられて円環状に見えていると考えられています。

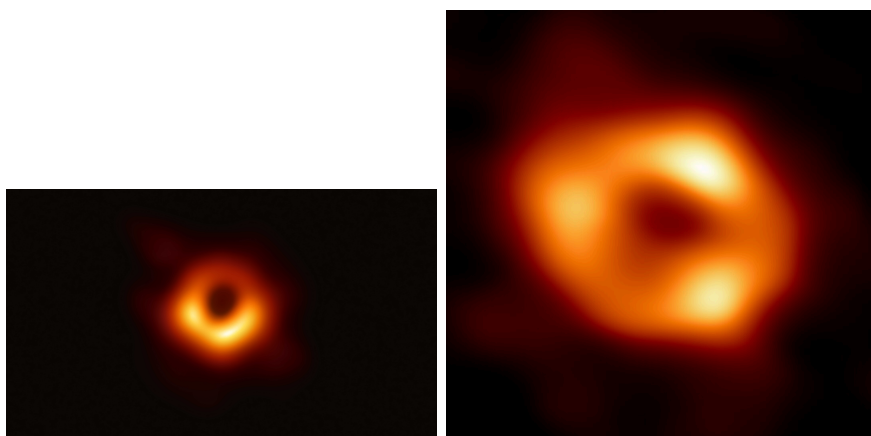


図 6.2 イベント・ホライズン・テレスコープ (EHT) による撮像。左：M87*、右：Sgr A* (Credit: EHT Collaboration)

さて、宇宙にはどのようなブラックホールがあるのでしょうか？

- X 線星：恒星質量ブラックホール

$12M_{\odot}$ 程度以上の重い恒星の進化の最終段階で重力崩壊して形成されと考えられています。こうしてできるブラックホールは Chandrasekhar 質量 $1.4M_{\odot}$ より重く $30M_{\odot}$ 程度より軽いと考えられます。これらは恒星質量ブラックホールと呼ばれています。周辺にある物質が降着すると高温になって X 線を放射し、X 線星として観測されます。その中でも有名なものは Cyg X-1 です。

- 銀河中心核：超大質量ブラックホール

多くの銀河の中心には $10^5 M_{\odot} - 10^{10} M_{\odot}$ 程度の非常に重いブラックホールが存在すると考えられています。これらは、超大質量ブラックホールと呼ばれています。我々の銀河中心は Sgr A* と呼ばれていますが、そこにも $4.0 \times 10^6 M_{\odot}$ または $4.3 \times 10^6 M_{\odot}$ 程度のブラックホールが存在すると考えられています。Genzel らと

Ghez らは Sgr A* の周辺の恒星の軌道を独立に観測してその中心に $10^6 M_\odot$ の非常にコンパクトな天体があることを確かめました。二人は 2020 年にノーベル物理学賞を授与されました。イベントホライズンテレスコープで撮像された M87* はアンドロメダ銀河中心の $6.5 \times 10^9 M_\odot$ の超大質量ブラックホールです。超大質量ブラックホールがどのようにしてできたのか、現在もよくわかっていません。

- 重力波源の連星ブラックホール

数 $M_\odot$ から $100 M_\odot$ 程度のブラックホールが連星を組んで重力波を出しながら合体するというイベントが LIGO, Virgo, KAGRA などの重力波観測によって日々観測されています。最初に見つかったイベントは GW150914 です。Weiss, Barish, Thorne は 2017 年にノーベル物理学賞を授与されました。ブラックホールと中性子星の連星も見つかっています。これらのブラックホールの多くは恒星進化起源と思われていますが、原始ブラックホールなど他の起源のものも混ざっているかもしれません。

また、まだ見つかっていませんが、理論的に予想されているブラックホールとして以下のようなものがあります。

- 原始ブラックホール

恒星ができる前のごく初期の宇宙に何らかの原因で重力崩壊が起こって生成されたとされるブラックホールを原始ブラックホールと呼びます。1971 年に Hawking によって提案されました。なかでもインフレーション時に生成されるゆらぎのうち非常に大きな振幅を持つものが重力崩壊してブラックホールになるというシナリオが代表的な例です。その質量は Chandrasekhar 質量より非常に小さいものも可能です。小さなものは Planck 質量 10^{-5} g から大きなものは $10^{55} \text{ g} \simeq 10^{22} M_\odot$ のものまで議論されています。

- 中間質量ブラックホール

恒星質量ブラックホールは恒星進化の理論から $30 M_\odot$ 程度までと予想されていて、一方超大質量ブラックホールは観測的に $10^5 M_\odot$ 程度以上なので、その間の数 $100 M_\odot$ から数 $1000 M_\odot$ の質量のブラックホールがあるかないかという問題が提起されています。このようなブラックホールは中間質量ブラックホールと言われています。

また、しばしば誤解されていますが、ブラックホールと見られている天体が本当にブラックホールであることを観測的に証明することは原理的に不可能です。なぜなら本来のブラックホール領域や事象の地平線は遠方の観測者の因果的過去にはないため原理的に観測できないからです。そこでブラックホール疑似天体というものが議論されています。例えば、グラヴァスター、ワームホール、超回転星、ボゾン星、裸の特異点、ファズボールなどが挙げられます。またブラックホールだけでも Schwarzschild 解や Kerr 解では表されないものである可能性も議論されています。このような非標準的なブラックホールと

しては、荷電ブラックホール、有毛ブラックホール、正則ブラックホールなどが挙げられます。可視光・重力波などによるブラックホール様天体の観測が進むにつれて、このような可能性が熱心に調べられています。

6.2.5 演習問題

1. $M_{\odot}$ に対する r_g を求めよ。
2. Planck 質量 $m_{\text{Pl}} \simeq 10^{-5} \text{ g}$ に対する r_g を求めよ。
3. $10^{55} \text{ g} \simeq 10^{22} M_{\odot}$ に対する r_g を求めよ。

第7章

ビッグバン宇宙論

7.1 膨張宇宙論

7.1.1 観測的発見

1929年に Hubble は遠方の銀河からの光ほど本来の光の波長より長くなっており、その波長の伸びが我々からその銀河までの距離に比例することを発見しました。光の波長が長くなることを赤方偏移といいます。これが光の Doppler 効果^{*1}によるものであるとすると、銀河の後退速度 v が我々からの銀河の位置 x に比例することになります。比例係数を H_0 とすると

$$v = H_0 x \quad (7.1.2)$$

です。実は 1927 年に同様の法則を Lemaitre が見出していたことが最近わかったので、この法則を Hubble-Lemaitre の法則といいます。 H_0 は Hubble 定数といいます。観測値は

$$H_0 = 100h \text{ km/s/Mpc} \quad (7.1.3)$$

と書いたときに $h \simeq 0.7$ です。また一般に赤方偏移は波長の伸びを

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{src}}} = 1 + z \quad (7.1.4)$$

と書いて、 z のことを赤方偏移ということが多いです。Hubble-Lemaitre の法則は図 7.1 のように宇宙全体が一様に膨張していると考えると自然に説明できます。

この後退速度 v が光速 c に達する距離 r を宇宙の地平線といいます。地平線長 ℓ_H は

$$\ell_H = cH_0^{-1} \simeq 4 \left(\frac{h}{0.7} \right)^{-1} \text{ Gpc} \quad (7.1.5)$$

^{*1} いま観測者に対して波源が進行方向前方に存在するとする。波源における波長を λ_{src} とし観測される波長を λ_{obs} とし、波源の媒質に対する速度を v_{src} とし観測者の媒質に対する速度を v_{obs} とすると、

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{src}}} = \frac{c_s + v_{\text{src}}}{c_s + v_{\text{obs}}} \quad (7.1.1)$$

が得られる。ただし c_s は波の伝播速度である。

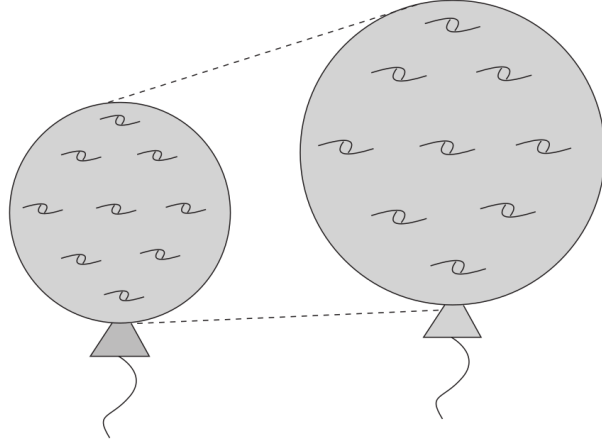


図 7.1 Hubble-Lemaître の法則は一樣に膨張する風船の上に描かれた銀河の運動によって自然に説明できる。(Credit: 原田知広・宮本雲平)

と計算できます。これより遠い領域は観測できないと考えられます。正しい理解には一般相対論が必要ですので、ここではこれくらいにします。

7.1.2 一樣等方宇宙モデル

宇宙全体を研究する学問を宇宙論といいます。宇宙は大変複雑であるため現在実験・観測されている事実だけを使って論じるのは非常に困難です。そこで大胆な仮定を採用して問題を簡単にしてそれを解き、実験・観測との整合性を調べるという戦略をとることになります。このような仮定は一般に作業仮説と呼ばれます。宇宙論の基本的な作業仮説は「宇宙に特別な場所・方向はなく、一樣等方である」というもので、宇宙原理といいます。これを採用すると、宇宙の線素は座標 t, r, θ, ϕ を用いて、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (7.1.6)$$

という形に書くことができます。ここで $a(t)$ はスケール因子と呼ばれる関数です。 $K = 0, \pm 1$ は宇宙の空間曲率です。図 7.2 では 2 次元の曲面で表していますが、 $K = 0$ は平坦で、 $K = 1$ は正曲率、 $K = -1$ は負曲率です。この計量は Friedmann によって 1922 年に初めて書かれたもので、この時空を Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 時空といいます。

$a(t)$ を決める方程式は Einstein 方程式から

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{K}{a^2} \quad (7.1.7)$$

と得られます。これを Friedmann 方程式といいます。ここで ρ は、エネルギー密度を c^2 で割ったもので質量密度といいます。

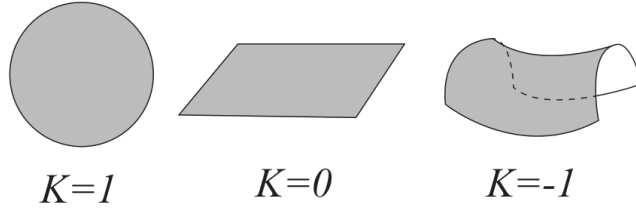


図 7.2 宇宙の空間曲率と対応する 2 次元曲面 (Credit: 原田知広・宮本雲平)

一応この方程式はニュートン力学的考察で得られるので、それを紹介します*2。いま物質が一様等方に分布しているとします。適当な点を中心 O とし、銀河 P の O からの距離を $r(t)$ とします。 P の力学的エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM}{r} = \epsilon \quad (7.1.8)$$

となります。ここで

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho(t)r^3(t) \quad (7.1.9)$$

は P の内側の質量で、 ϵ は定数です。現在の時刻 $t = t_0$ で Hubble-Lemaitre の法則

$$\dot{r}(t_0) = H_0 r(t_0) \quad (7.1.10)$$

から、

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left[H_0^2 - \frac{8\pi G}{3} G\rho(t_0) \right] r^2(t_0) = -\frac{K}{2} r^2(t_0) \quad (7.1.11)$$

となります。ただし、

$$K = - \left[H_0^2 - \frac{8\pi G}{3} G\rho(t_0) \right] \quad (7.1.12)$$

とおきました。ここで宇宙が常に一様等方であるためには、

$$r(t) = a(t)r(t_0) \quad (7.1.13)$$

となっていなければなりません。これを用いて (7.1.8) を書き直すと Friedmann 方程式 (7.1.7) が得られます。

$\rho = \rho(t)$ はどう決まるかというと、半径 $r(t)$ の球体の内部のエネルギーの変化が外からなされる仕事に等しいので

$$d \left(\frac{4\pi}{3} \rho(t) r^3(t) c^2 \right) = -P d \left(\frac{4\pi}{3} r^3(t) \right) \quad (7.1.14)$$

となります。これを書き直すと

$$\dot{\rho} + 3 \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (7.1.15)$$

*2 一般相対論の観点からは、このニュートン力学的導出を完全に正当化することは困難です。

が得られます。これはエネルギー保存則です。

また膨張宇宙において光の伝播を調べると波長が $\lambda \propto a$ となることがわかります。つまり時刻 t で放射された光を現在観測したとすると

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{src}}} = \frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z \quad (7.1.16)$$

これより、 z を宇宙のスケール因子が現在の $1/(1+z)$ 倍の時期を指すものとして、 t の代わりに使います。現在は $z=0$ ということになります。

7.1.3 膨張則と宇宙論パラメータ

宇宙の主な構成要素は、物質 ($P \simeq 0$)、輻射 ($P \simeq \rho c^2/3$)、宇宙項 ($\rho = \text{const}$) であると観測的に示唆されています。密度はそれぞれの成分に関するエネルギー保存則 (7.1.14) から

$$\rho_M = \rho_{M0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3, \quad \rho_R = \rho_{R0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4, \quad \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} \quad (7.1.17)$$

となります。ここで添字の 0 は $t = t_0$ での値を表しています。ここで $\rho_R \propto T^4$ とすると、 $T \propto a^{-1}$ となります。 ρ は、

$$\rho = \rho_{M0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_{R0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_{\Lambda 0} \quad (7.1.18)$$

と書けます。現在これらの宇宙の組成がどうなっているのかを表すために以下のような量を定義します。

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{c0}}, \quad \Omega_{M0} = \frac{\rho_{M0}}{\rho_{c0}}, \quad \Omega_{R0} = \frac{\rho_{R0}}{\rho_{c0}}, \quad \Omega_{\Lambda 0} = \frac{\rho_{\Lambda 0}}{\rho_{c0}}, \quad k_0 = \frac{K}{a_0^2 H_0^2}. \quad (7.1.19)$$

ただし

$$\rho_{c0} := \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (7.1.20)$$

は臨界密度と呼ばれています。Friedmann 方程式で $t = t_0$ とした式から、

$$\Omega_0 = 1 + k_0 \quad (7.1.21)$$

が成り立ちます。観測的には

$$\Omega_{M0} \simeq 0.3, \quad \Omega_{R0} \simeq 0.00004, \quad \Omega_{\Lambda 0} \simeq 0.7, \quad k_0 \simeq 0 \quad (7.1.22)$$

ですので、宇宙はほとんど平坦であるということになります。図 7.3 は宇宙の全エネルギー密度に占める各成分の割合を示しています。

このことから宇宙は以下のような進化をたどったことがわかります。

- $z \gtrsim 20000$: 輻射優勢期

$$a \propto t^{1/2} \quad (7.1.23)$$

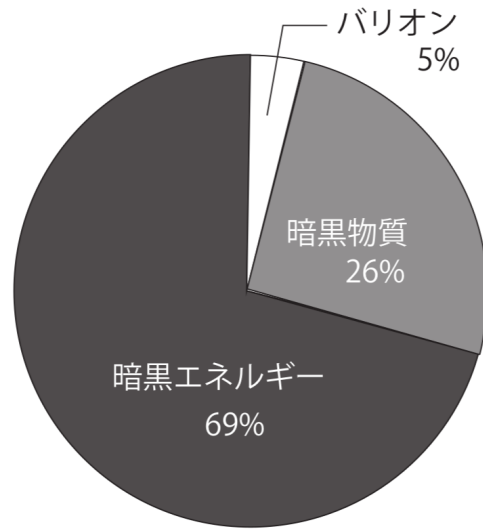


図 7.3 宇宙の全エネルギー密度に占める各成分の割合。(Credit: 原田知広・宮本雲平)

- $20000 \gtrsim z \gtrsim 1$: 物質優勢期

$$a \propto t^{2/3} \quad (7.1.24)$$

- $z \lesssim 1$: 宇宙項優勢期

$$a \propto e^{H_0 t} \quad (7.1.25)$$

実際には現在はまだ宇宙項優勢にはなりきっていないので、まだ指数関数ではないのですが加速膨張は起こっています。1998 年から 1999 年にかけて Perlmutter ら, Schmidt ら, Riess らは超新星爆発の詳細観測によって我々の宇宙が加速膨張していることを明らかにしました。この三人は 2011 年のノーベル物理学賞を授与されています。

7.1.4 演習問題

1. (7.1.3) を用いて (7.1.5) を示せ。
2. (7.1.22) における Ω_{R0} の値を、観測されている CMB の温度 2.7 K と (7.1.3) で与えられる Hubble 定数から計算し、 h を残した形で求めよ。
3. (7.1.23), (7.1.24), (7.1.25) を導け。

7.2 ビッグバン理論の概要と問題点

7.2.1 ビッグバン理論の概要

ビッグバン理論は 1946 年から 1950 年ごろに Gamow, Alpher, Herman によって提案されたシナリオです。基本的な仮定は以下の 3 つです。

- 宇宙は高温高密度の熱平衡状態から始まった。
- 宇宙膨張は一様等方模型で記述される。
- 宇宙の構造は重力不安定性によって形成された。

その観測的証拠は以下のものです。

- Hubble-Lemaitre の法則
- 宇宙の軽元素組成
恒星大気の組成は重量比で H と He が 0.7 と 0.25-0.28 でありそれ以外の重い元素が $0.02 - 2 \times 10^{-5}$ 程度となっている。星の元素合成では He をこれほど多く作るのは不可能であり、H, He は宇宙論起源と考えることが自然です。
- 宇宙背景マイクロ波放射 (CMB)
1965 年に Penzias と Wilson は全天から 2.7 K の黒体放射が一様に降り注いでいるのを観測しました。これは宇宙が過去に一様で高温高密度の熱平衡状態であったことの証拠です。Penzias と Wilson は 1978 年にノーベル物理学賞を受賞しました。

7.2.2 宇宙の熱史

宇宙膨張とともに温度 T は下がってきます。そこで温度が下がってくるにつれてどのような反応が進むかが重要になってきます。以下のようなイベントが起こったと考えられています。

- $T \gg 200\text{GeV}$
すべての標準理論の粒子は超相対論的で対生成・対消滅に関して熱化学平衡にあり、黒体放射として振る舞う。
- $T \simeq 200\text{GeV}$
電弱相転移。電磁気力と弱い力が分離する。
- $T \simeq 150\text{MeV}$
クォークハドロン相転移。クォークがハドロンに閉じ込められる。
- $T \simeq 8 \times 10^8\text{K}$
元素合成が開始される。
- $T \simeq 10^4\text{K}$
物質輻射等密度時刻 ($\rho_M = \rho_R$)。輻射優勢から物質優勢に切り替わる。
- $T \simeq 4000\text{K}$
水素再結合。宇宙が中性化する。
- $T \simeq 2700\text{ K}$
光が直進ようになる。晴れ上がり。この際の光が CMB として観測される。

特に重要なのが元素合成です。温度が $8 \times 10^8 \text{K}$ 程度まで下がると



という反応が起こって元素合成が進みます。しかし、質量数 5,6,8 の安定な原子核が存在しないので、 ${}^7\text{Li}$ と ${}^7\text{Be}$ が作られてそこで打ち止めになります。詳しい計算によると He の生成量が 0.23 となります。またバリオンの存在量が $\Omega_{b0} \simeq 0.02 - 0.04$ と予言されます。これは物質のほとんどが非バリオンのダークマターであることを意味します。

7.2.3 ビッグバン理論の問題点

ビッグバン理論は様々な観測的な事実を説明できる非常に優れた理論ですが、原理的な問題もあります。また、最新の精密な観測データと合わないと言われることがあります。

以下では原理的な問題を上げていきます。このうち次の 3 つは 1980 年代に発展したインフレーション理論の動機となり、ある程度まで解決されました。

- 地平線問題

ビッグバン理論では初期宇宙は常に減速膨張します。この際、宇宙の地平線の広がりよりも早く膨張するので、宇宙は今まで見えていなかった部分がだんだん見えてくるようになります。実際、現在観測されている CMB には宇宙の晴れ上がり時の地平線長の半径の円が多数入っています。そうすると、この円より大きな波長の非一様性をなす機構が存在しないのでこれより長いスケールで大きな非一様性が見えていてもよいのに、観測されている CMB は非常に一様に近いことがわかっています。これは非常に不自然です。これは一様性問題とも呼ばれています。

- 平坦性問題

Friedmann 方程式の右辺では、物質の項は a^{-3} に、輻射の項は a^{-4} に比例しますが、曲率項は a^{-2} に比例します。これは初期宇宙では曲率が重要ではなくても、時間が経ってくると曲率項が重要になってくるということです。現在の宇宙の曲率が無視できるほど小さいということは、初期宇宙には物質の寄与と比べて曲率の寄与がとんでもなく小さいということです。なぜ宇宙が曲率の寄与がこのような不自然に極めて小さい状態から始まったのかというのが、平坦性問題です。

- モノポール問題

素粒子の大統一理論では宇宙の温度が下がってくる際の相転移時に大量の磁気モノポールが生成されることが予想されます。この磁気モノポールは非常に安定なのでその後宇宙にたくさん残っているはずですが、現在そのようなものは全く観測されていません。

また以下の問題はビッグバン理論の問題というよりは現代物理学全体の未解決問題として認識されています。

- 宇宙項問題

宇宙項の値が量子重力によって決まっているとすると、自然な値は $\Lambda \sim l_{\text{Pl}}^{-2}$ となりますが、現在観測されている値はそれより 122 桁も小さいことがわかっています。しかし、なぜこのように不自然に小さい値をとったのかはわかりません。また関連する問題として、なぜ現在物質のエネルギー密度と宇宙項の密度が同程度であるのかという問題もあり、これは一致問題とされています。

- ダークマター

ビッグバン理論では元素合成の議論から物質のほとんどはバリオンではないダークマターからなると結論されます。また銀河や銀河団の観測などでもダークマターが物質の多くの質量を占めることがわかっています。さらにダークマターは現在見られるような宇宙の構造が形成される際にも不可欠な要素です。ところがダークマターがなんであるかについてはビッグバン理論は答えません。素粒子論ではダークマターの役割を担う粒子の候補がありますが、そのような候補は非常にたくさんある上、多くの候補は実験的に否定されています。一方、未発見の素粒子ではなく原始ブラックホールがダークマターであるという可能性も提案されています。

一方、観測データとの不整合についてはいろいろな問題が指摘されてきました。

- 宇宙年齢問題

20 世紀末に球状星団にある古い星の観測によって 130 億年以上の年齢のものがあることがわかり、一方物質と輻射だけの平坦な宇宙では宇宙年齢が 100 億年程度になってしまい、観測的に許される程度の負曲率を入れても 130 億年程度にしかならないというのが宇宙年齢問題です。宇宙項を導入すると宇宙年齢が 137 億年程度まで伸びることで、この問題は一応解決されました。

- ダークエネルギー

現在の宇宙が加速膨張しているとしてその最も簡単な説明は宇宙項なのですが、そうであるとは限らないというのがダークエネルギーの考え方です。実際、最近の Dark Energy Spectroscopic Instrument (DESI) による遠方銀河の赤方偏移の精密観測では宇宙項による加速膨張ではデータに合わないという主張もなされています。実際には、宇宙項ではなくても $\rho c^2 + 3P < 0$ を満たす物質であれば宇宙を加速膨張させることはできるので、そういうものをひとくりにダークエネルギーと読んでそういうものの性質を理論的・観測的にしらべようという研究が行われています。また、重力理論を変えてしまえばエキゾチック物質を考えなくても加速膨張させることができるかもしれません。そのような試みは修正重力理論とよばれています。

- ハッブル緊張

$H_0 = 100h \text{ km/s/Mpc}$ を精密に観測するのは非常に難しいのですが、Planck 衛星などによる CMB の非等方性観測から決められる値 $h \sim 0.68$ と超新星爆発観測から決められる値 $h \simeq 0.72$ とで、2 つの観測値が統計的に有意に異なっているように

見えます。いまこれらの方法と独立な方法による観測の誤差も小さくなっており、観測の進展によって解決される可能性もあります。一方、理論的なモデルによってこれを解決しようとする試みも行われています。

7.2.4 演習問題

1. 地平線問題に関連して、観測されている全天の CMB に宇宙の晴れ上がり (last scattering) 当時の地平線長に対応する円がいくつほど入っているだろうか。次の手順で求めよ。ただし、ここではオーダー評価することが目的なので、宇宙は物質優勢であるとし、地平線長は $l_H \simeq ct$ と評価して計算して良い。
 - (a) 物質優勢期にはスケール因子 a が $t^{2/3}$ に比例することを示せ。
 - (b) 晴れ上がり時の輻射の温度は約 3000K である。この際の赤方偏移 z を求めよ。
 - (c) 晴れ上がり時のスケール因子は現在の何倍か？
 - (d) 晴れ上がり時の時刻 t を現在時刻 t_0 を用いて表せ。
 - (e) 晴れ上がり時の地平線長と CMB 全天の半径の比を求めよ。
 - (f) CMB 全天に晴れ上がり時の地平線長に対応する円がいくつ入っているか計算せよ。

参考文献

- [1] 佐藤文隆「宇宙物理」(岩波書店 1995)
- [2] 小玉英雄「相対論的宇宙論」(丸善 1991)
- [3] 北本俊二・原田知広・亀田真吾「宇宙まるごと Q&A」(理工図書 2020)