数理で読み解く
石取りゲーム

連載◎第 5 回補足 (2009 年 8 月号)

佐藤文広
●立教大学理学部

制限ニムとグランディ数列（続）

1. 制限ニムをさらに一般化する（続）

ここでは、連載第 5 回第 1 節で説明した、グランディ数列のファーガソンの定理を利用した計算法の正確な定式化と、それによって $g(n) = 0, 1$ となる n が決定できることの証明を与えます。

定理 5b.i $S = \{s_1, \ldots, s_r\}$ $(1 \leq s_1 < \cdots < s_r)$ のとき、a_{ij} $(0 \leq i,\ 0 \leq j \leq r)$ を

$$a_{00} = 0,\ a_{01} = s_1, \ldots,\ a_{0r} = s_r,$$

$k \geq 1$ に対し、

$$a_{k0} = \operatorname{mex}\{a_{ij} \mid 0 \leq i \leq k-1,\ 0 \leq j \leq r\},$$
$$a_{k1} = a_{k0} + s_1, \ldots,\ a_{kr} = a_{k0} + s_r$$

と定める。このとき、$j = 0, 1$ に対し、$g(n) = j$ となる n の集合は

$$\{a_{ij} \mid i \geq 0\}$$

と一致する。

【証明】 まず、すべての非負整数は $\{a_{ij}\}$ に現れることに注意しておこう。実際、mex による a_{k0} の定義により、どの正整数 n も第 n 行までには必ず現れる。さて、$g(a_{i0}) = 0$ が成り立てば、ファーガソンの定理（定理 5.1）により、$g(a_{i1}) = g(a_{i0} + s_1) = 1$ である。また、$j \geq 2$ について、$a_{ij} = a_{i0} + s_j \to a_{i0}$ だから、$g(a_{ij}) \geq 1$ である。したがって、すべての $i \geq 0$ について $g(a_{i0}) = 0$ であることを示せば、$\{a_{i0} \mid i \geq 0\}$ が $g(n) = 0$ となる n の全体であることが分かる。また、このときファーガソンの定理より、$\{a_{i1} \mid i \geq 0\}$ が $g(n) = 1$ となる n の全体であることも従う。

では、$g(a_{k0}) = 0$ を k に関する数学的帰納法で示そう。$k = 0$ については、$g(a_{00}) = g(0) = 0$ は明らかである。$k \geq 1$ として、$i < k$ ならば $g(a_{i0}) = 0$ だったとする。a_{k0} から移行できる $a_{k0} - s_j$ は

$$\{a_{ij} \mid 0 \leq i < k,\ 0 \leq j \leq r\}$$

に含まれているが、もし $g(a_{k0} - s_j) = 0$ だとすると、帰納法の仮定により、ある i ($< k$) に対して $a_{k0} - s_j = a_{i0}$ となる. これは $a_{k0} = a_{i0} + s_j = a_{ij}$ を意味するから、a_{k0} の mex による定義と矛盾する。よって、$g(a_{k0} - s_j) \neq 0$ $(j = 1, \ldots, r)$ となるから、$g(a_{k0}) = 0$ である。 □