# 数理で読み解く 石取りゲーム

連載 第6回補足(2009年9月号)

## 佐藤文広

立教大学理学部

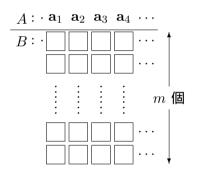
## 山の分割を許すニム(続)

ここでは、連載第6回第4節の定理6.5、第5節の定理6.6の証明を与えます。

## 4. 分割型制限ニムの m 倍 (続)

定理 6.5 ゲーム A が  $\cdot \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots (\mathbf{a}_k = 0,7)$  の形のコードネームを持つ分割型制限二ムで、さらに、7 は常に 2 個以上連続して現れると仮定する。このとき、A のコードネームから以下の手順で定まるコードネーム  $\cdot \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots (0 \le \mathbf{b}_k \le 7)$  を持つ新しいゲーム B は、ゲーム A の m 倍のゲームである。

ゲーム B のコードネームの生成手順: まず、



と上段に A のコードネームを書き、その下に B のコードネームを、 $\mathbf{a}_1$  の下の欄には  $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_m$ ,  $\mathbf{a}_2$  の下の欄には  $\mathbf{b}_{m+1},\dots,\mathbf{b}_{2m}$  という要領で順に記入するための欄を用意する。記入の仕方は次の通り。まず、 $\mathbf{a}_k=0$  のとき、その下にある m 個の欄にはすべて  $\mathbf{0}$  を記入する。次に、 $\mathbf{A}$  のコードネームに  $\mathbf{0}$ 7  $\cdots$  70 と  $\mathbf{0}$  にはさまれた連続する  $\mathbf{7}$  が現れたとき、その下にある欄には、

0	7	• • • • • • •	7	0
0	0	[	7	0
0	0		0	0
:	:		:	:
0	0		0	0
0	7	[]	0	0

と記入する。中間の破線で囲まれた部分には、0 から 7 までを自由に書き込んでよい。ただし、B のコードネームとして読んだとき、連続する 2m-1 個の中には、必ず 1 個は 7 が入るようにする。

【証明】 n=mq+r  $(0\leq r\leq m-1)$  としたとき、 $g_B(n)=g_A(q)$  となることを、n に関する数学的帰納法で証明する。まず、n=0 のとき q=0 であり、 $g_B(0)=g_A(0)=0$  だから、主張は成り立っている。n>0 とする。

$$J_A(q) = \left\{ g_A(h) \stackrel{*}{+} g_A(k) \ \middle| \ 0 \le h+k < q, \ \mathbf{a}_{q-h-k} = 7 \right\},$$
  $J_B(n) = \left\{ g_B(P) \ \middle| \ P \$ はゲーム  $B \$ で局面  $(n) \$ から移行できる局面 $\right\},$ 

とおくと、

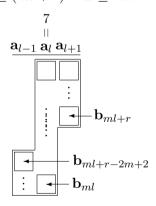
$$g_A(q) = \max(J_A(q)), \quad g_B(n) = \max(J_B(n))$$

である。ただし、ゲーム B ではコードの記入の仕方によって、局面 (n) から移行できる局面が違うので、 $J_B(n)$  は上のように言葉による説明になっている。さて、 $J_A(q)=J_B(n)$ を証明すればよい。これが示されれば、

$$g_A(q) = \max(J_A(q)) = \max(J_B(n)) = g_B(n)$$

となるからである。

まず、 $J_A(q)\subset J_B(n)$  を示す。 $n=mq+r\;(0\leq r\leq m-1),\,h+k+l=q,\,\mathbf{a}_l=7$  だとする。B のコードネームの定め方により、下図の枠内の2m-1 個の中には7 が必ず存在する。それを $\mathbf{b}_w$  とすると、0<(ml+r)-w<2m-2 である。したがって、



 $ml + r - w = r_1 + r_2, 0 \le r_1, r_2 \le m - 1$  となる  $r_1, r_2$  をとると、

$$n = (mh + r_1) + (mk + r_2) + w, \quad \mathbf{b}_w = 7$$

となる。 したがって、 $(n) \to (mh+r_1)+(mk+r_2)$  と 2 山に分ける手がゲーム B において可能であり、帰納法の仮定により

$$g_A(h) + g_A(k) = g_B(mh + r_1) + g_B(mk + r_2) \in J_B(n)$$

となる。したがって、 $J_B(n)\supset J_A(q)$  である。 次に  $J_B(n)\subset J_A(q)$  を示す。 $J_B(n)$  の元は

$$g_B(u) + g_B(v)$$
  $(u, v \ge 0, u + v + w = n, \mathbf{b}_w > 0)$ 

と表せる。n, u, v, w を

$$n = mq + r$$
,  $u = mh + r_1$ ,  $v = mk + r_2$ ,  $w = ml - r_3$ ,  $0 \le r, r_1, r_2, r_3 \le m - 1$ 

と表す。このとき、 $\mathbf{b}_w \neq 0$  だから、B のコードネームの定め方により  $\mathbf{a}_l = 7$  である。また、帰納法の仮定により、

$$g_B(u) + g_B(v) = g_A(h) + g_A(k)$$

である。

$$n = m(h+k+l) + (r_1 + r_2 - r_3), -(m-1) \le r_1 + r_2 - r_3 \le 2m - 2$$

であるから、

$$q = \begin{cases} h+k+(l-1) & (-(m-1) \le r_1 + r_2 - r_3 \le -1) \\ h+k+l & (0 \le r_1 + r_2 - r_3 \le m-1) \\ h+k+(l+1) & (m \le r_1 + r_2 - r_3 \le 2m-2) \end{cases}$$

となる。第1のケースでは、 $r_3 \ge 1$  であり、B のコードネームの定め方により  $\mathbf{a}_{l-1} = 7$  でなければならない。第2のケースで、 $\mathbf{a}_l = 7$  であることは w のとり方よりすでに分かっている。第3のケースでは、 $r_3 \le m-2$  であり、やはり B のコードネームの定め方により  $\mathbf{a}_{l+1} = 7$  でなければならない。したがって、いずれの場合にも  $(q) \to (h) + (k)$  という局面の移行はゲーム A で許されており、 $q_A(h) + q_A(k) \in J_A(q)$  となる。

注意:一松信『石取りゲームの数理』定理 5.4 では、定理の最後の部分「連続する 2m-1 個の中には、必ず 1 個は 7 が入るようにする」が「連続する 2m-2 個の中には、必ず 1 個は 7 が入るようにする」という少し強い条件になっている。しかし、一松本の証明そのままで、上の定理が証明されている。

#### 5. 分割型制限ニムのいとこ(続)

定理 6.6~A をコードネームが  $\cdot \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \cdots$  で与えられる分割型制限ニムとし、 $\mathbf{a}_1$  は偶数 だと仮定する。正整数 k に対し、

$$l_k = \max \left\{ h \mid h \ge -1, \ \mathbf{a}_{k-h} \supset 2^{h+1} \right\}$$

とおき、

$$\mathbf{b}_k = 2^{l_k+2} - 1 = 2^{l_k+1} + 2^{l_k} + \dots + 2 + 1$$

と定める。ただし、 $h \ge -1$ ,  $\mathbf{a}_{k-h} \supset 2^{h+1}$  を満たす h が存在しないときには、 $\mathbf{b}_k = 0$  とする。このとき、コードネーム  $\cdot \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3 \cdots$  を持つ分割型制限ニム B について、

$$g_B(n) = g_A(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

が成り立つ。

【証明】  $g_B(n)=g_A(n+1)$  を n に関する数学的帰納法で証明しよう。 ${\bf a_1}$  が偶数であるという仮定より  $g_A(1)=0$  であるから、 $g_B(0)=g_A(1)=0$  となる。したがって、n=0 では正しいことが分かる。n>0 としよう。ゲーム A において局面 (n+1) から一手で移行できる局面の全体を  $N_{1,A}(n+1)$ ,ゲーム B において局面 (n) から一手で移行できる局面の全体を  $N_{1,B}(n)$  とし,

$$J_A(n+1) = \{ g_A(P) \mid P \in N_{1,A}(n+1) \},$$
  
$$J_B(n) = \{ g_B(P) \mid P \in N_{1,B}(n) \}$$

とおく。

$$g_A(n+1) = \max(J_A(n+1)), \ g_B(n) = \max(J_B(n))$$

であるから,  $J_A(n+1)=J_B(n)$  であることを示せばよい。ゲーム A においては,  $\mathbf{a_k}\supset 2^{h+1}$  となる k< n+1 について、

$$(n+1) \to (p_1, p_2, \dots, p_{h+1}),$$
  
 $p_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, h+1),$   
 $p_1 + p_2 + \dots + p_{h+1} = n+1-k$ 

という指し手が許される。一方、B のコードネームの定め方により、 $\mathbf{a_k}$  についての条件 から、 $\mathbf{b_{k+h}} \supset 2^{h+1} + 2^h + \cdots + 2 + 1$  が従う。これは、ゲーム B において、

$$(n) \to (q_1, q_2, \dots, q_{h+1}),$$
  
 $q_i \ge 0 \ (i = 1, 2, \dots, h+1),$   
 $q_1 + q_2 + \dots + q_{h+1} = n - k - h$ 

という指し手が許されていることを意味する。したがって、 $N_{1,A}(n+1)$  と  $N_{1,B}(n)$  の間には、

$$p_i \mapsto q_i = p_i - 1, \ q_i \mapsto p_i = q_i + 1$$
  
 $(i = 1, 2, \dots, h + 1)$ 

によって1対1対応が存在する。ここで、帰納法の仮定を用いると、

$$g_A(p_1) + g_A(p_2) + \dots + g_A(p_{h+1})$$

$$= g_A(q_1 + 1) + g_A(q_2 + 1) + \dots + g_A(q_{h+1} + 1)$$

$$= g_B(q_1) + g_B(q_2) + \dots + g_B(q_{h+1})$$

が成り立つから、対応する A の局面と B の局面のグランディ数は一致している。すなわち、 $J_A(n+1)=J_B(n)$  であることが分かった。