数理で読み解く
石取りゲーム

連載◎第 9 回補足（2009 年 12 月号）

佐藤文広
●立教大学理学部

マヤゲーム（続）

この補足では、連載第 9 回では省略された補題 9.10 の証明、および、マヤゲームの基本定理（定理 9.11、9.7）の証明を与えます。また、マヤゲームに関する文献も紹介しておきます。

1. 写像 f_t の準同型性

補題 9.10 $t \in \mathbb{Z}$ に対し、写像 $f_t : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f_t(x) = ((x \overset{*}{+} t) - x) \overset{*}{+} t$ と定義する。このとき、f_t は

$$f_t(x \overset{*}{+} y) = f_t(x) \overset{*}{+} f_t(y) \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

を満たす。（すなわち、$\mathbb{Z}$ をニム和でアーベル群と見たとき、f_t は群 $\mathbb{Z}$ の自己準同型である。）

【証明】 t の 2 進展開を

$$t = \sum_{i=1}^{N} 2^{r_i} \quad (0 \le r_1 < r_2 < \cdots)$$

とする。ここで、$t \ge 0$ なら $N < \infty$ だが、$t < 0$ のときは $N = \infty$ となることに注意する。さらに、$t \ge 0$、$N < \infty$ のとき、$r_{N+1} = \infty$ とし $2^\infty = 0$ と考えることにしておく（連載第 9 回、脚注 4 参照）。また、$x \in \mathbb{Z}$ の 2 進展開を

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_k \quad (x_k = 0, 1)$$

とする。このとき、$x \overset{*}{+} t$ の 2 進展開

$$x \overset{*}{+} t = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x'_k$$

において、 k がある r_i に等しいときには x'_k は x_k と異なり（すなわち、$x_k = 0$ なら $x'_k = 1$, $x_k = 1$ なら $x'_k = 0$） 、そうでないときには $x'_k = x_k$ である。したがって、$(x \overset{*}{+} t) - x$ は 2^{r_i} の形の項以外はすべて消えて

$$(x \overset{*}{+} t) - x = \sum_{i=1}^{N} 2^{r_i} y_i, \quad y_i = \begin{cases} 1 & (x_{r_k} = 0) \\ -1 & (x_{r_k} = 1) \end{cases}$$

となる。$-2^{r_i} = \sum_{j=r_i}^{\infty} 2^j$ に注意すると、

$$2^{r_i} y_i = 2^{r_i} + x_{r_i} \sum_{j=r_i+1}^{\infty} 2^j$$

と表せるから、

$$\begin{aligned}(x \overset{*}{+} t) - x &= \sum_{i=1}^{N} \left(2^{r_i} + x_{r_i} \sum_{j=r_i+1}^{\infty} 2^j \right) \\ &= 2^{r_1} + \sum_{i=1}^{N} \left(x_{r_i} \sum_{j=r_i+1}^{\infty} 2^j + 2^{r_{i+1}} \right)\end{aligned}$$

と変形できる。ただし、冒頭の約束にしたがって、$t \geq 0$（したがって、$N < \infty$）のときは $i = N$ に対応する項の $2^{r_{N+1}}$ は 0 と考えることに注意しておく。ここで、

$$\begin{aligned}x_{r_i} \sum_{j=r_i+1}^{\infty} 2^j + 2^{r_{i+1}} &= \begin{cases} 2^{r_{i+1}} & (x_{r_i} = 0) \\ \sum_{j=r_i+1}^{r_{i+1}-1} 2^j & (x_{r_i} = 1) \end{cases} \\ &= x_{r_i} \sum_{j=r_i+1}^{r_{i+1}} 2^j \overset{*}{+} 2^{r_{i+1}}\end{aligned}$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned}f_t(x) &= ((x \overset{*}{+} t) - x) \overset{*}{+} t \\ &= \left\{ 2^{r_1} + \sum_{i=1}^{N} \left(x_{r_i} \sum_{j=r_i+1}^{r_{i+1}} 2^j \overset{*}{+} 2^{r_{i+1}} \right) \right\} \overset{*}{+} \left(\sum_{i=1}^{N} 2^{r_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} x_{r_i} \sum_{j=r_i+1}^{r_{i+1}} 2^j\end{aligned}$$

が得られる。補題 9.10 の関係式 $f_t(x \overset{*}{+} y) = f_t(x) \overset{*}{+} f_t(y)$ は、この式より明らかである。

2. マヤ距離の性質

マヤゲームのグランディ数に現れる重要な量である $M(x, y)$ は x と y の**マヤ距離**と呼ばれます。基本定理（定理 9.11、9.7）の証明にとってマヤ距離の性質はポイントになりますから、ここで調べておきましょう。

補題 9b.1 $x \in \mathbb{Z}$ に対し、$N(x) = (x-1) \overset{*}{+} x$ とおく。このとき、

$$N(x) = \begin{cases} 2^{e+1} - 1 & (x \neq 0) \\ -1 & (x = 0) \end{cases}$$

が成り立つ。ただし、$x \neq 0$ のとき、e は x が 2^e で割り切れ、2^{e+1} で割り切れないような整数である。

【証明】 $x = 0$ のときは明らかである。$x \neq 0$ とする。e の定義により、$x = 2^{e+1}y + 2^e$ $(y \in \mathbb{Z})$ と表される。このとき、補題 9.9（連載第 9 回、12 月号）により

$$\begin{aligned}(x-1) \overset{*}{+} x &= (2^{e+1}y + (2^e - 1)) \overset{*}{+} (2^{e+1}y + 2^e) \\ &= (2^{e+1}y \overset{*}{+} (2^e - 1)) \overset{*}{+} (2^{e+1}y \overset{*}{+} 2^e) \\ &= (2^e - 1) \overset{*}{+} 2^e = 2^e + (2^e - 1) = 2^{e+1} - 1\end{aligned}$$

となる。 □

この補題の $N(x)$ は x の**マヤノルム**と呼ばれます。$x, y \in \mathbb{Z}$ のマヤ距離 $M(x, y)$ が $M(x, y) = N(x - y)$ と表わされることは、マヤ距離の定義（連載第 9 回の (1) 式）から明らかです。

命題 9b.2 $x, y \in \mathbb{Z}$ とする。このとき、

(i) $M(x, y) = N(x - y) = N(x \overset{*}{+} y)$

(ii) $M(x, y) = M(x + k, y + k) = M(x \overset{*}{+} k, y \overset{*}{+} k)$ $(k \in \mathbb{Z})$

(iii) $M(x, y) \geq 0$ $(x \neq y)$, $M(x, x) = -1$

が成り立つ。

【証明】 $M(x, y) = N(x - y)$ と (iii) は $M(x, y)$ の定義と補題 9b.1 から直ちに従う。$M(x, y) = N(x \overset{*}{+} y)$ を示すには、$2^e | (x - y) \Longleftrightarrow 2^e | (x \overset{*}{+} y)$ を確かめればよい。（ここで $a|b$ で a は b を割り切ることを意味する。）$x = 2^e a + m$, $y = 2^e b + n$ $(0 \leq m, n < 2^e)$ と表したとき、$x \overset{*}{+} y = 2^e(a \overset{*}{+} b) + (m \overset{*}{+} n)$, $0 \leq m \overset{*}{+} n < 2^e$ だから、

$$\begin{aligned}2^e | (x \overset{*}{+} y) &\Longleftrightarrow m \overset{*}{+} n = 0 \\ &\Longleftrightarrow m = n \quad \Longleftrightarrow \quad 2^e | (x - y)\end{aligned}$$

である。(ii) は (i) から明らかである。 □

命題 9b.3 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ がどの 2 つも互いに相異なる整数だとする。このとき、$M(x, y), M(y, z), M(z, x)$ のうちで最大のものを $M(x, y)$ だとすると、

$$M(x, y) > M(x, z) = M(y, z)$$

が成り立つ。

【証明】 $M(x,y)=2^{e+1}-1$ とする。この e を用いて $x=2^e a+m$, $y=2^e b+n$ と表すと, $m=n$ かつ $a-b$ は奇数である。さらに $z=2^e c+r$ と表す。$a-b$ が奇数だから、$a-c$ か $b-c$ のどちらかは偶数となる。例えば、$a-c$ が偶数だとしよう。ここで、もし $r=m=n$ だとすると、$x-z$ は 2^{e+1} で割り切れてしまうから、$M(x,z)\geq 2^{e+2}-1>2^{e+1}-1=M(x,y)$ となり、$M(x,y)$ が最大であることに反する。よって、$r\neq m=n$ である。よって、2^e は $x-z, y-z$ を割り切らず、$M(x,y)>M(x,z), M(y,z)$ である。また、$x-z$ を割り切る最大の 2 ベキは $m-r$ を割り切る最大の 2 ベキに等しく、$m=n$ だから、$y-z$ を割り切る最大の 2 ベキにも等しい。これは、$M(x,z)=M(y,z)$ を意味する。 □

3. マヤゲームの基本定理の証明

では、マヤゲームの基本定理（定理 9.11）の証明に取り掛かります。この定理から $F(P)$ がマヤゲームのグランディ数を与えること（定理 9.7）が直ちに従うのでした。

定理 9.11 マヤゲームの局面 $P=(m_1,\ldots,m_n)$, $m_i\neq m_j$ $(i\neq j)$ について

$$s=F(P)=m_1\overset{*}{+}\cdots\overset{*}{+}m_n\overset{*}{+}\sum_{1\leq i<j\leq n}^{*}M(m_i,m_j)$$

とおく。このとき、非負整数 s' $(\neq s)$ に対し、 P から移行できる局面 P' で $F(P')=s'$ となるものの数は, $s'<s$ ならば奇数（したがって、≥ 1)、$s'>s$ ならば偶数（0 かもしれない）である。

以下では、$F(P)$ はまだグランディ数かどうかわかっていませんから、単に P の F-数と呼ぶことにしましょう。

● m_i' を求める

証明のための最初の仕事として、F-数が s で s' $(s'\neq s)$ が与えられたとき、m_i を m_i' に変えて F-数を s' にするにはどうしたらよいかを調べます。

$F(P)$ を m_i に注目して

$$F(P)=\left(m_i\overset{*}{+}\sum_{j\neq i}^{*}M(m_i,m_j)\right)\overset{*}{+}\left(m_1\overset{*}{+}\cdots\overset{*}{+}m_{i-1}\overset{*}{+}m_{i+1}\overset{*}{+}\cdots\overset{*}{+}m_n\overset{*}{+}\sum_{\substack{j<k\\ j,k\neq i}}^{*}M(m_j,m_k)\right)$$

と変形する。$P^{(i)}=(m_1,\ldots,m_{i-1},m_{i+1},\ldots,m_n)$ とおく。また一般に $A=(a_1,\ldots,a_r)\in\mathbb{Z}^r$ に対し

$$\phi_A(x)=x\overset{*}{+}\sum_{j=1}^{r}{}^{*}M(x,a_i) \tag{1}$$

とおくと、上の変形は

$$F(P) = \phi_{P^{(i)}}(m_i) \overset{*}{+} F(P^{(i)}) \tag{2}$$

と表せる。 したがって、

$$\phi_{P^{(i)}}(x) = s' \overset{*}{+} F(P^{(i)}) \tag{3}$$

の解を $x = m'_i$ とし、m_i を m'_i に変えれば F-数は s' に等しくなる。

命題 9b.4 $A = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$ に対し、(1) で定義した ϕ_A を写像 $\phi_A : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ と考える。また、$A = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$, $B = (b_1, \ldots, b_s) \in \mathbb{Z}^s$ に対し、$AB = (a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s) \in \mathbb{Z}^{r+s}$ と定め、さらに、$\phi_A(B) = (\phi_A(b_1), \ldots, \phi_A(b_s))$ とおく。このとき、

(i) $M(\phi_A(x), \phi_A(y)) = M(x, y)$ $(x, y \in \mathbb{Z})$

(ii) $\phi_{AB}(x) = \phi_{\phi_A(B)}(\phi_A(x))$

(iii) ϕ_A は全単射で、$\phi_A^{-1} = \phi_{\phi_A(A)}$

が成り立つ。

【証明】 A の成分の個数 r についての数学的帰納法によって証明する。

ステップ 1. $r = 1$ のとき、(i) は成立する。

$A = (a)$ とすると、$\phi_A(x) = x \overset{*}{+} M(x, a) = (x \overset{*}{+} a - 1) \overset{*}{+} a$ である。したがって、$M(\phi_A(x), \phi_A(y)) = M(x, y)$ は補題 9b.2 (ii) から直ちに従う。

ステップ 2. ϕ_A について (i) が成り立つならば、任意の B について (ii) が成り立つ。

実際、

$$\begin{aligned}
\phi_{AB}(x) &= \left(x \overset{*}{+} \sum_{j=1}^{r}{}^{*} M(x, a_i) \right) \overset{*}{+} \left(\sum_{k=1}^{s}{}^{*} M(x, b_k) \right) \\
&= \phi_A(x) \overset{*}{+} \sum_{k=1}^{s}{}^{*} M(\phi_A(x), \phi_A(b_k)) = \phi_{\phi_A(B)}(\phi_A(x))
\end{aligned}$$

となる。ただし、2 番目の等号で ϕ_A が (i) を満たすことを用いた。

ステップ 3. 一般の A について (i) が成り立つ。

$A = A'A''$, $A' = (a_1)$, $A'' = (a_2, \ldots, a_r)$ とする。ステップ 1 により、$\phi_{A'}$ は (i) を満たすから、ステップ 2 により、$\phi_A = \phi_{\phi_{A'}(A'')} \circ \phi_{A'}$ である。帰納法の仮定により、$\phi_{\phi_{A'}(A'')}$ も (i) を満たすとしてよいから、

$$\begin{aligned}
M(\phi_A(x), \phi_A(y)) &= M(\phi_{\phi_{A'}(A'')}(\phi_{A'}(x)), \phi_{\phi_{A'}(A'')}(\phi_{A'}(y))) \\
&= M(\phi_{A'}(x), \phi_{A'}(y)) = M(x, y)
\end{aligned}$$

を得る。これで (i) が任意の A について示された。そこで、ステップ 2 に戻ると、任意の A, B について (ii) が成り立つことが分かる。

ステップ 4. (iii) を証明する。

(ii) により、$\phi_{AA}(x) = \phi_{\phi_A(A)} \circ \phi_A$ である。一方、

$$\phi_{AA}(x) = x \overset{*}{+} \sum_{j=1}^{r}{}^{*} M(x, a_i) \overset{*}{+} \sum_{j=1}^{r}{}^{*} M(x, a_i) = x$$

である。したがって、任意の A について $\phi_{\phi_A(A)} \circ \phi_A$ は恒等写像、特に、ϕ_A は単射である。また $\phi_{\phi_A(A)}$ も単射である。ここで ϕ_A が全射でなかったとすると、$y \notin \phi_A(\mathbb{Z})$ なる y が存在する。このとき、$x = \phi_{\phi_A(A)}(y)$ とおくと、$x = \phi_{\phi_A(A)}(\phi_A(x))$ でもあるから、$\phi_{\phi_A(A)}$ の単射性により、$y = \phi_A(x)$ でなければならない。だが、これは $y \notin \phi_A(\mathbb{Z})$ に矛盾する。よって、ϕ_A は全射、したがって全単射で、$\phi_A^{-1} = \phi_{\phi_A(A)}$ となる。 □

命題 9b.4 (iii) により、(3) を満たす整数 x は唯一つ存在し、

$$x = \phi_{P^{(i)}}^{-1}(s' \overset{*}{+} F(P^{(i)})) = \phi_{\phi_{P^{(i)}}(P^{(i)})}(s' \overset{*}{+} F(P^{(i)}))$$

で与えられる。そこで、

$$m_i' = \phi_{\phi_{P^{(i)}}(P^{(i)})}(s' \overset{*}{+} F(P^{(i)}))$$

とおくと、

$$F(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i', m_{i+1}, \ldots, m_n) = s'$$

となる。

ここで m_i' を使いやすい形に変形しておこう。

補題 9b.5 $t = s \overset{*}{+} s'$, $y_i = \phi_{P^{(i)}}(m_i)$ とおくと、

$$m_i' = t \overset{*}{+} y_i \overset{*}{+} \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}}{}^{*} M(y_i, (-t) \overset{*}{+} y_j)$$

と表される。

【証明】 $s' \overset{*}{+} F(P^{(i)}) = t \overset{*}{+} F(P) \overset{*}{+} F(P^{(i)}) = t \overset{*}{+} \phi_{P^{(i)}}(m_i) = t \overset{*}{+} y_i$ である。よって、

$$m_i' = t \overset{*}{+} y_i \overset{*}{+} \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}}{}^{*} M(t \overset{*}{+} \phi_{P^{(i)}}(m_i), \phi_{P^{(i)}}(m_j))$$

である。ここで、

$$\phi_{P^{(i)}}(m_i) = \phi_P(m_i) \overset{*}{+} M(m_i, m_i) = \phi_P(m_i) \overset{*}{+} (-1),$$
$$\phi_{P^{(i)}}(m_j) = \phi_P(m_j) \overset{*}{+} M(m_i, m_j)$$

であるから、命題 9b.2 (ii) と命題 9b.4 (i) より

$$\begin{aligned}
M(t \overset{*}{+} \phi_{P^{(i)}}(m_i), \phi_{P^{(i)}}(m_j)) &= M(t \overset{*}{+} \phi_P(m_i) \overset{*}{+} (-1), \phi_P(m_j) \overset{*}{+} M(m_i, m_j)) \\
&= M(t \overset{*}{+} (-1), \phi_P(m_i) \overset{*}{+} \phi_P(m_j) \overset{*}{+} M(\phi_P(m_i), \phi_P(m_j))) \\
&= M(t \overset{*}{+} (-1), \phi_P(m_i) \overset{*}{+} \phi_P(m_j) - 1) \\
&= M(-(t+1), \phi_P(m_i) \overset{*}{+} \phi_P(m_j) - 1) \\
&= M(-t, \phi_P(m_i) \overset{*}{+} \phi_P(m_j)) \\
&= M(-t, \phi_{P^{(i)}}(m_i) \overset{*}{+} (-1) \overset{*}{+} \phi_{P^{(j)}}(m_j) \overset{*}{+} (-1)) \\
&= M(-t, y_i \overset{*}{+} y_j) = M(y_i, (-t) \overset{*}{+} y_j)
\end{aligned}$$

となる。補題はこれより直ちに従う。 □

補題 9b.6 $A = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$ が $a_1, \ldots, a_r \geq 0$, $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ を満たすとき、整数 x に対し

$$\phi_A(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 0 \text{ かつ } x \neq a_i \ (i = 1, \ldots, r)$$

が成り立つ。

【証明】 $x < 0$ のとき、任意の i に対し、$x \neq a_i$ であり $M(x, a_i) \geq 0$. よって、(1) の右辺の各項のうち負のものは x だけであり、$\phi_A(x) < 0$ である。次に、$x \geq 0$, $x = a_i$ だとすると、$M(x, a_i) = -1$, $M(x, a_j) \geq 0$ $(j \neq i)$. よって、(1) の右辺の各項のうち負のものは $M(x, a_i)$ だけであり、やはり $\phi_A(x) < 0$ である。最後に、$x \geq 0$, $x \neq a_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ のときには、(1) の右辺の各項はすべて非負であるから、このときには、$\phi_A(x) \geq 0$ となる。 □

この補題によれば、$s' \geq 0$ のとき、(3) の解である m'_i は $m_1, \ldots, m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots, m_n$ のいずれとも異なる非負整数であり、$(m_1, \ldots, m_{i-1}, m'_i, m_{i+1}, \ldots, m_n)$ はマヤゲームで許された局面である。したがって、$P = (m_1, \ldots, m_n)$ から $(m_1, \ldots, m_{i-1}, m'_i, m_{i+1}, \ldots, m_n)$ への移行が許されるためには、$m'_i < m_i$ であればよい。そこで、ニムの場合の定理 9.4 の証明にならって、

$$\left((s' - s) \overset{*}{+} s \overset{*}{+} s'\right) \overset{*}{+} \sum_{i=1}^{n}{}^{*} \left((m'_i - m_i) \overset{*}{+} m_i \overset{*}{+} m'_i\right) \geq 0 \tag{4}$$

を示すことによって、定理 9.11 を証明しよう。$s' = t \overset{*}{+} s$ とおくと、この左辺は、

$$\Phi_t(P) := f_t(F(P)) \overset{*}{+} \sum_{i=1}^{n}{}^{*} f_{m_i \overset{*}{+} m'_i}(m_i) \tag{5}$$

と書くことができることに注意する。

● 証明の基本方針

任意の $t \geq 0$ とマヤゲームの局面 P について $\Phi_t(P) \geq 0$ が成り立つことを次の方針で証明する。

(I) $P = (m_1)$ のときには、$\Phi_t(P) \geq 0$.

(II) $P = (m_1 - 1, \ldots, m_n - 1)$ に対して $\Phi_t(P) \geq 0$ ならば、$\bar{P} = (0, m_1, \ldots, m_n)$ に対しても $\Phi_t(\bar{P}) \geq 0$.

(III) $P = (m_1, \ldots, m_n)$ に対して $\Phi_t(P) \geq 0$ ならば、$k \geq 0$ として $\tilde{P} = (m_1 \overset{*}{+} k, \ldots, m_n \overset{*}{+} k)$ に対しても $\Phi_t(\tilde{P}) \geq 0$.

(I) が成り立つことは、ほとんど明らかである。実際、$P = (m_1)$ のとき, $s = m_1$, $s' = m_1'$ であり、

$$\Phi_t(P) = (m_1' - m_1) \overset{*}{+} m_1 \overset{*}{+} m_1' \overset{*}{+} (m_1' - m_1) \overset{*}{+} m_1 \overset{*}{+} m_1' = 0$$

となるからである。

さらに (II), (III) も証明されたとしよう。このとき、$\Phi_t(P) \geq 0$ $(P = (m_1, \ldots, m_n))$ は n に関する数学的帰納法で証明できる。実際、$n = 1$ のときは、(I) で示されている。$n \geq 2$ としよう。このとき、$m_2 \overset{*}{+} m_1, \ldots, m_n \overset{*}{+} m_1$ はすべて互いに相異なり、また、$m_1 \neq m_i$ $(i \neq 1)$ だから、$m_2 \overset{*}{+} m_1, \ldots, m_n \overset{*}{+} m_1 \geq 1$ である。よって、 $P' = (m_2 \overset{*}{+} m_1 - 1, m_3 \overset{*}{+} m_1, \ldots, m_n \overset{*}{+} m_1 - 1)$ はマヤゲームの局面であり、 帰納法の仮定より、$\Phi_t(P') \geq 0$ が成り立つ。(II) より、さらに、$P'' = (0, m_2 \overset{*}{+} m_1, m_3 \overset{*}{+} m_1, \ldots, m_n \overset{*}{+} m_1)$ に対して $\Phi_t(P'') \geq 0$ が成り立つ。最後に (III) より、$P = (0 \overset{*}{+} m_1, m_2 \overset{*}{+} m_1 \overset{*}{+} m_1, \ldots, m_n \overset{*}{+} m_1 \overset{*}{+} m_1)$ についても $\Phi_t(P) \geq 0$ が成り立つ。

● (II) の証明

補題 9b.7 $m_1, \ldots, m_n \geq 1$ を互いに相異なる自然数とし、$P = (m_1 - 1, \ldots, m_n - 1)$, $\bar{P} = (0, m_1, \ldots, m_n)$ とおくと、$F(P) = F(\bar{P})$ が成り立つ。

【証明】 補題 9b.1 および命題 9b.2 により

$$\begin{aligned}
F(\bar{P}) &= 0 \overset{*}{+} m_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \sum_{i=1}^{n}{}^{*} M(m_i, 0) \overset{*}{+} \sum_{1 \leq i < j \leq n}{}^{*} M(m_i, m_j) \\
&= m_1 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \sum_{i=1}^{n}{}^{*} ((m_i - 1) \overset{*}{+} m_i) \overset{*}{+} \sum_{1 \leq i < j \leq n}{}^{*} M(m_i - 1, m_j - 1) \\
&= \sum_{i=1}^{n}{}^{*} (m_i - 1) \overset{*}{+} \sum_{1 \leq i < j \leq n}{}^{*} M(m_i - 1, m_j - 1) = F(P)
\end{aligned}$$

となる。 □

【(II) の証明】 $F(P)=F(\bar{P})=s, s'\neq s, s'\geq 0$ とする。このとき、$F(m'_0,m_1,\ldots,m_n)=F(0,m_1,\ldots,m_{i-1},m'_i,m_{i+1},\ldots,m_n)=s'$ となる $m'_0,m'_1,\ldots,m'_n$ をとる．補題 9b.7 によれば、$F(m_1-1,\ldots,m_{i-1}-1,m'_i-1,m_{i+1}-1,\ldots,m_n-1)=s'$ $(1\leq i\leq n)$ が成り立つ。よって、$t=s\overset{*}{+}s'$ のとき、

$$\begin{aligned}
\Phi_t(\bar{P}) &= (s'-s)\overset{*}{+}s\overset{*}{+}s'\overset{*}{+}\big((m'_0-0)\overset{*}{+}0\overset{*}{+}m'_0\big)\overset{*}{+}\sum_{i=1}^{n}{}^{*}\{(m'_i-m_i)\overset{*}{+}m_i\overset{*}{+}m'_i\}\\
&= (s'-s)\overset{*}{+}s\overset{*}{+}s'\overset{*}{+}\sum_{i=1}^{n}{}^{*}\Big\{((m'_i-1)-(m_i-1))\overset{*}{+}(m_i-1)\overset{*}{+}(m'_i-1)\Big\}\\
&\quad\overset{*}{+}\sum_{i=1}^{n}{}^{*}\Big\{m_i\overset{*}{+}m'_i\overset{*}{+}(m_i-1)\overset{*}{+}(m'_i-1)\Big\}\\
&= \Phi_t(P)\overset{*}{+}\sum_{i=1}^{n}{}^{*}(N(m_i)\overset{*}{+}N(m'_i))
\end{aligned}$$

となる。補題 9b.6 から、m_i,m'_i $(i=1,\ldots,n)$ は正整数だから、$N(m_i),N(m'_i)\geq 0$ であり、$\Phi_t(\bar{P})\geq 0\Longleftrightarrow\Phi_t(P)\geq 0$ が得られる。 □

● (III) の証明

【(III) の証明】 $m_1,\ldots,m_n,k$ を非負整数とし、$i\neq j$ のとき、$m_i\neq m_j$ とする。マヤゲームの局面 $P=(m_1,\ldots,m_n)$, $\tilde{P}=(m_1\overset{*}{+}k,\ldots,m_n\overset{*}{+}k)$ を考えると、実は

$$\Phi_t(\tilde{P})=\Phi_t(P) \tag{6}$$

が成り立つのである。 これから (III) が従うことは明らかであるから、以下、(6) を証明しよう。まず、

$$F(\tilde{P})=F(P)\overset{*}{+}\tilde{k},\quad \tilde{k}=\begin{cases}k & (n\text{ が奇数のとき})\\ 0 & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$$

である。実際、命題 9b.2 (ii) により

$$\begin{aligned}
F(\tilde{P}) &= (m_1\overset{*}{+}k)\overset{*}{+}\ldots\overset{*}{+}(m_n\overset{*}{+}k)\overset{*}{+}\sum_{1\leq i<j\leq n}{}^{*}M(m_i\overset{*}{+}k,m_j\overset{*}{+}k)\\
&= m_1\overset{*}{+}\ldots\overset{*}{+}m_n\overset{*}{+}\tilde{k}\overset{*}{+}\sum_{1\leq i<j\leq n}{}^{*}M(m_i,m_j)=F(P)\overset{*}{+}\tilde{k}
\end{aligned}$$

である。$y_i=\phi_{P^{(i)}}(m_i)$, $\tilde{y}_i=\phi_{\tilde{P}^{(i)}}(m_i\overset{*}{+}k)$ とおくと、やはり、命題 9b.2 (ii) により

$$\tilde{y}_i=(m_i\overset{*}{+}k)\overset{*}{+}\sum_{j\neq i}{}^{*}M(m_i\overset{*}{+}k,m_j\overset{*}{+}k)=(m_i\overset{*}{+}k)\overset{*}{+}\sum_{j\neq i}{}^{*}M(m_i,m_j)=y_i\overset{*}{+}k$$

となる。したがって、

$$m'_i = t \overset{*}{+} y_i \overset{*}{+} \sum_{j \neq i}^{*} M(y_i, (-t) \overset{*}{+} y_j),$$
$$\tilde{m}'_i = t \overset{*}{+} \tilde{y}_i \overset{*}{+} \sum_{j \neq i}^{*} M(\tilde{y}_i, (-t) \overset{*}{+} \tilde{y}_j)$$

とおくと、$\tilde{m}'_i = m'_i \overset{*}{+} k$ である。よって、

$$\begin{aligned}
\Phi_t(\tilde{P}) &= f_t(F(P) \overset{*}{+} \tilde{k}) \overset{*}{+} \sum_{i=1}^{n}{}^{*} \left\{ (\tilde{m}'_i - m_i \overset{*}{+} k) \overset{*}{+} \tilde{m}'_i \overset{*}{+} m_i \overset{*}{+} k \right\} \\
&= f_t(F(P)) \overset{*}{+} f_t(\tilde{k}) \overset{*}{+} \sum_{i=1}^{n}{}^{*} \left\{ (m'_i \overset{*}{+} k - m_i \overset{*}{+} k) \overset{*}{+} m'_i \overset{*}{+} \tilde{m}_i \right\} \\
&= f_t(F(P)) \overset{*}{+} f_t(\tilde{k}) \overset{*}{+} \sum_{i=1}^{n}{}^{*} f_{m'_i \overset{*}{+} \tilde{m}_i}(m_i \overset{*}{+} k) \\
&= f_t(F(P)) \overset{*}{+} f_t(\tilde{k}) \overset{*}{+} \sum_{i=1}^{n}{}^{*} \left(f_{m'_i \overset{*}{+} \tilde{m}_i}(m_i) \overset{*}{+} f_{m'_i \overset{*}{+} \tilde{m}_i}(k) \right) \\
&= \Phi_t(P) \overset{*}{+} f_t(\tilde{k}) \overset{*}{+} \sum_{i=1}^{n}{}^{*} f_{m'_i \overset{*}{+} \tilde{m}_i}(k)
\end{aligned}$$

を得られる。

$$f_t(\tilde{k}) \overset{*}{+} \sum_{i=1}^{n}{}^{*} f_{m'_i \overset{*}{+} \tilde{m}_i}(k) = (\tilde{k} \overset{*}{+} t - \tilde{k}) \overset{*}{+} t \overset{*}{+} \sum_{i=1}^{n}{}^{*} \left\{ (m'_i \overset{*}{+} m_i \overset{*}{+} k - k) \overset{*}{+} m'_i \overset{*}{+} m_i \right\}$$

であるから、次の補題によって $f_t(\tilde{k}) \overset{*}{+} \sum^{*n}_{i=1} f_{m'_i \overset{*}{+} \tilde{m}_i}(k) = 0$ となり、(6) が得られる。□

補題 9b.8 n の偶奇に応じて, $n = 2n_0$ または $2n_0 + 1$ とおく。このとき、$m_1, \ldots, m_n$ の順番を適当に入れ替えると、

$$m'_1 \overset{*}{+} m_1 = m'_2 \overset{*}{+} m_2,$$
$$m'_3 \overset{*}{+} m_3 = m'_4 \overset{*}{+} m_4,$$
$$\cdots$$
$$m'_{2n_0-1} \overset{*}{+} m_{2n_0-1} = m'_{2n_0} \overset{*}{+} m_{2n_0}$$

が成り立つ。n が奇数のときは、さらに、

$$m'_{2n_0+1} \overset{*}{+} m_{2n_0+1} = t$$

が成り立つ。

【証明】 $y_i = \phi_{P^{(i)}}(m_i) = m_i \overset{*}{+} \sum^*{}_{i\neq j} M(m_i, m_j)$ だったから、

$$\begin{aligned} m_i &= y_i \overset{*}{+} \sum_{i\neq j}^{*} M(m_i, m_j) = y_i \overset{*}{+} \sum_{i\neq j}^{*} M(\phi_P(m_i), \phi_P(m_j)) \\ &= y_i \overset{*}{+} \sum_{i\neq j}^{*} M(y_i \overset{*}{+} (-1), y_j \overset{*}{+} (-1)) = y_i \overset{*}{+} \sum_{i\neq j}^{*} M(y_i, y_j) \end{aligned}$$

と表せる。補題 9b.5 と合わせると、

$$m_i' \overset{*}{+} m_i = t \overset{*}{+} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}{}^{*} \Big(M(y_i, y_j) \overset{*}{+} M(y_i, (-1) \overset{*}{+} y_j) \Big)$$

となる。 必要なら番号を付けかえて、

$$M(y_i, y_j), M(y_i, (-1) \overset{*}{+} y_j) \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

のうちで最大のものを $M(y_1, y_2)$ （または、$M(y_1, (-1) \overset{*}{+} y_2)$）としよう。このとき、命題 9b.3 より、任意の y_i $(i \geq 3)$ に対して $M(y_1, y_i) = M(y_2, y_i)$, $M(y_1, (-1) \overset{*}{+} y_i) = M(y_2, (-1) \overset{*}{+} y_i)$ が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} m_1' \overset{*}{+} m_1 &= t \overset{*}{+} \sum_{j=2}^{n}{}^{*} \Big(M(y_1, y_j) \overset{*}{+} M(y_1, (-1) \overset{*}{+} y_j) \Big) \\ &= t \overset{*}{+} \Big(M(y_1, y_2) \overset{*}{+} M(y_1, (-1) \overset{*}{+} y_2) \Big) \overset{*}{+} \sum_{j=3}^{n}{}^{*} \Big(M(y_1, y_j) \overset{*}{+} M(y_1, (-1) \overset{*}{+} y_j) \Big) \\ &= t \overset{*}{+} \Big(M(y_1, y_2) \overset{*}{+} M(y_2, (-1) \overset{*}{+} y_1) \Big) \overset{*}{+} \sum_{j=3}^{n}{}^{*} \Big(M(y_2, y_j) \overset{*}{+} M(y_2, (-1) \overset{*}{+} y_j) \Big) \\ &= m_2' \overset{*}{+} m_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、$i \geq 3$ について、

$$\begin{aligned} m_i' \overset{*}{+} m_i &= t \overset{*}{+} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}{}^{*} \Big(M(y_i, y_j) \overset{*}{+} M(y_i, (-1) \overset{*}{+} y_j) \Big) \\ &= t \overset{*}{+} \sum_{\substack{j=3 \\ j\neq i}}^{n}{}^{*} \Big(M(y_i, y_j) \overset{*}{+} M(y_i, (-1) \overset{*}{+} y_j) \Big) \\ &\quad \overset{*}{+} M(y_i, y_1) \overset{*}{+} M(y_i, (-1) \overset{*}{+} y_1) \overset{*}{+} M(y_i, y_2) \overset{*}{+} M(y_i, (-1) \overset{*}{+} y_2) \\ &= t \overset{*}{+} \sum_{\substack{j=3 \\ j\neq i}}^{n}{}^{*} \Big(M(y_i, y_j) \overset{*}{+} M(y_i, (-1) \overset{*}{+} y_j) \Big) \end{aligned}$$

となる。（最大を与えるものが $M(y_1,(-1)\overset{*}{+}y_2)$ の場合も, $M(y_1,y_i)=M(y_2,(-1)\overset{*}{+}y_i)$, $M(y_1,(-1)\overset{*}{+}y_i)=M(y_2,y_i)$ となり、同様の議論で同じ結果が得られる。）次に

$$M(y_i,y_j), M(y_i,(-1)\overset{*}{+}y_j) \quad (3\le i<j\le n)$$

のうちで最大のものが、 $M(y_3,y_4)$ （または、$M(y_3,(-1)\overset{*}{+}y_4)$）となるように番号を付け直せば、

$$m_3'\overset{*}{+}m_3=m_4'\overset{*}{+}m_4,$$
$$m_i'\overset{*}{+}m_i=t\overset{*}{+}\sum_{\substack{5\le j\le n\\ j\ne i}}^{*}\Big(M(y_i,y_j)\overset{*}{+}M(y_i,(-1)\overset{*}{+}y_j)\Big) \quad (i\ge 5)$$

となる。これを繰り返していけば良い。ただし、n が奇数のときは、最後に $m_n'\overset{*}{+}m_n$ だけがペアを作れずに残り、

$$m_n'\overset{*}{+}m_n=t\overset{*}{+}\sum_{\substack{n\le j\le n\\ j\ne n}}^{*}\Big(M(y_i,y_j)\overset{*}{+}M(y_i,(-1)\overset{*}{+}y_j)\Big)=t$$

となる。 □

以上でマヤゲームの基本定理は完全に証明されました。

4. マヤゲームに関する文献

[1] 佐藤幹夫（上野健爾記）, あるゲームについて、第 12 回代数分科会シンポジウム報告集, 1968, pp.123–136.

[2] 榎本彦衛, Maya Game について (佐藤幹夫氏講義の記録)、『数学の歩み』15-1, pp.73–84.

[3] 榎本彦衛, マヤゲームの数学的理論 (佐藤幹夫氏講演), 『計算機によるゲームとパズルの諸問題』, 数理解析研究所講究録 98, 1970, pp.105–135.

[4] 佐藤幹夫, 『佐藤幹夫講義録 (1984/85)』（梅田亨記）, 数理解析レクチャーノート刊行会, 1989.

[5] 木村達雄編, 佐藤幹夫（他）著, 『佐藤幹夫の数学』, 日本評論社, 2007.

[6] 一松信,『石取りゲームの数理』, 森北出版, 1968 (オンデマンド版 2004).

[7] 山崎洋平,『組み合わせゲームの裏表』, シュプリンガー・フェアラーク, 1989.

[8] 川中宣明, 佐藤のゲームの魅力・ディンキン図形の魔力, 『数学の楽しみ』No.23, 日本評論社, pp.45–58.

[9] J.H.Conway, “On Numbers and Games”, 2nd Edition, AK Peters, 2001.

[10] E.R.Berlekamp, J.H.Conway, R.K. Guy, “Winning Ways for Your Mathematical Plays: Vol. 1-4”, AK Peters, 2001-2004.

[11] R. Sprague, Bemerkungen über eine spezielle Abelshce Gruppe, *Math. Z.* **51**(1949), 82–84.

[12] C. P. Welter, The advancing operation in a special abelian group, *Indagationes Math.* **14**(1952), 304–314; The theory of a class of games on a sequence of squares, in terms of the advancing operation in a special abelian group, *Indagationes Math.* **16**(1954), 194–200.

佐藤幹夫氏自身の講演に基づく記録が [1], [2], [3] である。マヤ代数、表現論との関係など紹介しきれなかった豊富な内容がある。ただし、どれも、一つの文献で完結しているわけではないので、併せ読む必要がある。[6] もマヤゲームの紹介を含んでいて大いに参考にさせていただいたが、$F(P)$ がグランディ数を与えていることの証明は省略されている。[5] では木村達雄氏によるインタビューの中で、佐藤幹夫氏が、マヤゲームを考察することとなった経緯や基本なアイディアを語っていて参考になる。[7] には、マヤゲームの理論が証明まで含めて紹介されているが、簡潔に書かれているので、考えながら読まないといけないかもしれない。上で与えた証明は佐藤幹夫氏の証明を忠実になぞったものだが、[9] で別証明が読める。[10] でもマヤゲームが取り上げられている。連載第 10 回 (2010 年 1 月号) で紹介するグランディ数の計算、最善手の計算は [10] にのっている。[11] では、5 個のコインの場合（4 個以下の場合は簡単であり、自明でない最小の個数）に後手必勝条件を与えた論文で、マヤゲーム研究のもっとも初期の論文であろう。[12] は、佐藤幹夫氏とほぼ同時期に完全な理論を与えた Welter の原論文である。さて、表現論との関係は、佐藤幹夫氏の [4] でも言及されている。この方向では、川中宣明氏が d 完全半順序集合（ヤング図形の一般化と見ることができる）にマヤゲームを拡張し、そのグランディ数を計算したのが、重要な発展であり、[8] はその解説である。