数理で読み解く
石取りゲーム

連載◎第 11 回補足（2010 年 2 月号）

佐藤文広
●立教大学理学部

ハッケンブッシュ（続）

この補足では、連載第 11 回では省略された融合原理（定理 11.8）の証明を与えます。

1. 融合原理

定理 11.8 (融合原理) 図形 G に対して,

- 1 つのサイクルに含まれる複数の節点を同一視

という**融合操作**を行ってできる図形を G' とするとき, G と G' のグランディ数は等しい : $g(G) = g(G')$.

以下では, この定理に反例が存在するとして矛盾を導く。G をこの定理の反例で辺の個数が最小であり, その中で節点の個数が最小なものとする. 特に, 地面上にある節点は 1 つである. このような G を「融合原理の最小反例」ということにしよう. 最小反例では、サイクル上のどの 2 点を融合させてもグランディ数は変化する。

補題 11b.1 G を融合原理の最小反例とすると, 相異なる節点 a, b について, a, b を結び辺をまったく共有しないような道は 2 本までしか存在しない.

【証明】 a, b を結ぶ, 辺を共有しない 3 本の道があったと仮定し, a, b を同一視してできる図形を H とする. G は最小反例だから、$g(H) \neq g(G)$ である。このとき, $g(G+H) \neq 0$ であり, $G+H$ は先手必勝である. したがって, $G \to G'$ で $g(G'+H) = 0$ となるものか, または, $H \to H'$ で $g(G+H') = 0$ となるものが存在する. どちらの場合も同様であるから, 前者の場合を考えよう. G の辺と H の辺とは対応しているから, G' に移行する際に取り除く辺に対応する辺を H から取り除いたものを H' とする. このとき, a, b は G' においてもサイクルの上にあるが, G の最小性により G' はもはや融合原理の反例とはならないので, a, b を融合した図形を G'' とすると $g(G'') = g(G')$ である. 仮定より, $g(G') = g(H)$ であるから, $g(G'') = g(H)$ となる. 一方, 構成法より $G'' = H'$ であるので, $g(G'') = g(H')$ である. したがって, $g(H) = g(H')$ となるが, $H \to H'$ のとき, $g(H) \neq g(H')$ だから, これは矛盾である. □

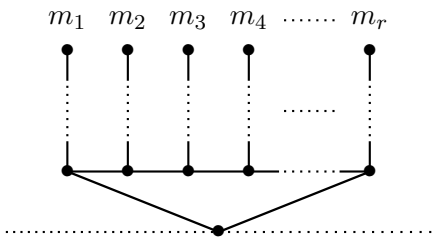
補題 11b.2 G を融合原理の最小反例とすると, 宙に浮いたサイクルは存在しない.

【証明】　サイクル C が宙に浮いているとする. C に含まれている辺をすべて取り除いた図形を G' とする. C が宙に浮いているから, $G' \neq \emptyset$ である. G' と C が 2 点を共有しているとすると, G' 内の道（地面を通ってもいい）と C 内の 2 つの道と 3 本の辺を共有しない道が存在してしまうから, G' と C は 1 点 a のみを共有する. したがって, C を取り除いたときに消える図形を H とすると, $G = H \underset{a}{\cup} G'$ である. H において, サイクル C に含まれる節点を融合した図形を H' とすると, G の最小性により $g(H) = g(H')$ であり, 置き換え原理により, $g(G) = g(H \underset{a}{\cup} G') = g(H' \underset{a}{\cup} G')$ となる. $H' \underset{a}{\cup} G'$ は G においてサイクル C に含まれる節点を融合した図形であるから, これは G が融合原理の反例であることに矛盾する. □

補題 11b.3 G を融合原理の最小反例とすると, 接地したサイクルがただ一つだけ存在する.

【証明】　前の補題により, サイクルはすべて接地している. 接地したサイクルが 2 つあったとする. それらを C_1, C_2 とする. もし, C_1, C_2 が連結していないとすると, G はより小さい図形の和と $G_1 + G_2$ と表せ, G の最小性から, G_1, G_2 においては融合原理が成り立ち、したがって、G についても融合原理が成り立ってしまうので, 矛盾である. 一方, C_1, C_2 が連結していたとすると, C_1 上の節点と C_2 上の節点とを結ぶ 3 本の辺を共有しない道ができてしまうので, やはり矛盾する. 最後に, サイクルがなければその図形は林であり、融合原理の反例にはならないので, G には接地したサイクルが 1 つだけ存在しなくてはならない. □

以上により, G が融合原理の最小反例ならば, 一点で接地したサイクルが一つだけ存在し, そのサイクルから出る枝はもはやサイクルを持たない。枝には置き換え原理が適用できるから, 枝分かれはないとしてよい. したがって、



の形の図形ということになる。これは、すでに調べた里山図形 $Y(m_1, \ldots, m_r)$ と同等である. しかし、すでに確認したように、定理 11.8 によって与えられる $Y(m_1, \ldots, m_r)$ のグランディ数は融合原理によって与えられる数値と一致しているから、これは反例にはならない。したがって、融合原理は常に成り立っていなければならない。