数理で読み解く
石取りゲーム

連載◎第 12 回補足（2010 年 3 月号）

佐藤文広
●立教大学理学部

最後は負けるが勝ち（続）

この補足では、連載第 12 回では省略されたいくつかの証明を与えます。すなわち、Rayleigh-Beatty の定理（定理 12.3）、チャヌシッチのグランディ数 $g(m,n)$ の加法的周期性（定理 12.7）、逆形のマヤゲームの特異局面の決定、の証明です。

● Rayleigh-Beatty の定理（定理 12.3）の証明

定理 12.3 (Rayleigh, Beatty) a, b を正の実数とするとき、次の 2 条件は同値である。

(i) a, b はともに正の無理数で、$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ を満たす.

(ii) 任意の自然数は

$$I := \{[a], [b], [2a], [2b], \ldots, [na], [nb], \ldots\}$$

の中にちょうど一回だけ必ず現れる. ただし, $[x]$ は x 以下で最大の整数を表す.

【証明】 ((i) $\Longrightarrow$ (ii)) もし, $[ma] = [nb] = k$ となる自然数 m, n, k が存在したとする. このとき,

$$k < ma < k+1, \quad k < nb < k+1$$

である. a, b は無理数なので, この不等式で等号は成り立たないことに注意する. これを変形すると,

$$\frac{m}{k+1} < \frac{1}{a} < \frac{m}{k}, \quad \frac{n}{k+1} < \frac{1}{b} < \frac{n}{k}$$

となる. 2 つの不等式を加え合わせると,

$$\frac{m+n}{k+1} = \frac{m}{k+1} + \frac{n}{k+1} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 < \frac{m}{k} + \frac{n}{k} = \frac{m+n}{k}$$

を得る. これより

$$k < m+n < k+1$$

となるが, m, n, k は自然数だから, このようなことはありえない. よって, I の中に同じ自然数が 2 回現れることはない.

次に, もし, ある自然数 k が I の中に現れなかったとする. このとき,

$$ma < k < k+1 < (m+1)a, \quad nb < k < k+1 < (n+1)b$$

となる m, n が存在する．これを変形すると，

$$\frac{m}{k} < \frac{1}{a} < \frac{m+1}{k+1}, \quad \frac{n}{k} < \frac{1}{b} < \frac{n+1}{k+1}$$

となる．2 つの不等式を加え合わせると，

$$\frac{m+n}{k} = \frac{m}{k} + \frac{n}{k} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 < \frac{m+1}{k+1} + \frac{n+1}{k+1} = \frac{m+n+2}{k+1}$$

を得る．これより

$$k - 1 < m + n < k$$

となるが, m, n, k は自然数だから, このようなことはありえない．したがって, どの自然数も I の中に現れる．

((ii) $\Longrightarrow$ (i)) p を任意の自然数とし、$1, 2, \ldots, p$ の中で $[ma]$ の形のものが r 個、$[nb]$ の形のものが s 個だとする。このとき、$r + s = p$ である。

$$[ma] \leq p \Longleftrightarrow ma < p + 1 \Longleftrightarrow m < \frac{p+1}{a}$$

だから、

$$\frac{p+1}{a} - 1 \leq r < \frac{p+1}{a}$$

である。同様にして

$$\frac{p+1}{b} - 1 \leq s < \frac{p+1}{b}$$

が得られる。この不等式を加え合わせると、

$$(p+1)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - 2 \leq p < (p+1)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

となる。これを変形すると、

$$\frac{p}{p+1} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{p+2}{p+1}$$

を得る。p は任意だから、$p \to \infty$ とすると、

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$$

でなくてはいけないことが分かる。ここで、a, b の一方が有理数であれば他方も有理数である。仮に a, b が有理数だとしよう。$a = v_1/u_1$, $b = v_2/u_2$ と既約分数に表すと、

$$[(nu_1v_2)a] = nv_1v_2 = [(nu_2v_1)b]$$

となり、自然数 nv_1v_2 が 2 回現れてしまう。したがって、(ii) が成り立つためには a, b はともに無理数でなければならない。 □

● チャヌシッチのグランディ数の加法的周期性

ここでは、チャヌシッチのグランディ数 $g(m,n)$ が周期 p、増分 p の加法的周期性を満たすこと（定理 12.7）を証明します。

定理 12.7 非負整数 m を固定したとき、（m に依存する）正整数 $p,\ n_0$ があり、

$$g(m,n+p)=g(m,n)+p \quad (n \geq n_0)$$

が成り立つ。

連載第 12 回（2010 年 3 月号）で説明したように、次の補題を証明すれば十分です。

補題 12.1b $h(m,n)=g(m,n)-(n-2m)$ とおくと、正整数 p と非負整数 n_0 があり、

$$h(m,n+p)=h(m,n) \quad (n \geq n_0)$$

を満たす。

証明の前に少し記号を用意します。$n \geq 2m$ として、

$$\begin{aligned}
U(m,n) &= \{g(0,n),g(1,n),\ldots,g(m-1,n)\},\\
L(m,n) &= \{g(m,0),g(m,1),\ldots,g(m,n-1)\},\\
D(m,n) &= \{g(m-1,n-1),g(m-2,n-2),\ldots,g(0,n-m)\},\\
\bar{U}(m,n) &= \{n-2m,\ldots,m+n-1,m+n\} \setminus U(m,n),\\
\bar{L}(m,n) &= \{n-2m,\ldots,m+n-1,m+n\} \setminus L(m,n),\\
\bar{D}(m,n) &= \{n-2m,\ldots,m+n-1,m+n\} \setminus D(m,n),\\
\bar{u}(m,n) &= \left\{k-(n-2m) \;\middle|\; k \in \bar{U}(m,n)\right\},\\
\bar{l}(m,n) &= \left\{k-(n-2m) \;\middle|\; k \in \bar{L}(m,n)\right\},\\
\bar{d}(m,n) &= \left\{k-(n-2m) \;\middle|\; k \in \bar{D}(m,n)\right\}
\end{aligned}$$

とおきます。$U(m,n)$, $L(m,n)$, $D(m,n)$ は、それぞれ、(m,n) の上側、左側、左上への対角線上に現れる局面のグランディ数の集合です。したがって、補題 12.6 を考慮すると、

$$\begin{aligned}
g(m,n) &= \min\{\bar{U}(m,n) \cap \bar{L}(m,n) \cap \bar{D}(m,n)\},\\
h(m,n) &= \min\{\bar{u}(m,n) \cap \bar{l}(m,n) \cap \bar{d}(m,n)\}
\end{aligned} \tag{1}$$

です。また、$\bar{u}(m,n)$, $\bar{l}(m,n)$, $\bar{d}(m,n)$ はいずれも $\{0,1,\ldots,3m\}$ に含まれています。さらに、整数の集合 A と整数 p に対して、

$$A+p=\{a+p \mid a \in A\}, \quad A-p=\{a-p \mid a \in A\}$$

と定義します。この記法を用いると、$\bar{u}(m,n)=\bar{U}(m,n)-(n-2m)$ などと書くことができます。では、以上を準備として、補題 12.1b の証明に取りかかりましょう。

【補題 12.1b の証明】 m についての数学的帰納法で証明する。$m=0$ のとき、$h(0,n)=g(0,n)-n=n-n=0$ だから、$p=1,\ n_0=0$ として周期性が成り立っている。$m>0$ とする。帰納法の仮定により、$h(m',n)$ $(0\le m'<m)$ は周期的だとしてよい。したがって、正整数 p と非負整数 n_0 を

$$h(m',n+p)=h(m',n)\quad(n\ge n_0)$$

が成り立つようにとれる（各 $m'<m$ に対する周期の最小公倍数を p とすればよい）。このとき、$g(m',n)$ $(0\le m'<m)$ について $n\ge n_0$ のときに加法的周期性が成り立つから、$n\ge n_0+m$ のとき、

$$U(m,n+p)=U(m,n)+p,\quad D(m,n+p)=D(m,n)+p$$

を得る。したがって、$n\ge n_0+m$ のとき、

$$\bar{u}(m,n+p)=\bar{u}(m,n),\quad \bar{d}(m,n+p)=\bar{d}(m,n)$$

となる。特に、$\bar{u}(m,n)$, $\bar{d}(m,n)$ は（$n\ge n_0+m$ のとき）$n \bmod p$ で定まる。次に、$L(m,n+1)=L(m,n)\cup\{g(m,n)\}$ だから、

$$\begin{aligned}\bar{L}(m,n+1) &= \{n+1-2m,\ldots,m+n,m+n+1\}\setminus L(m,n+1)\\ &= (\bar{L}(m,n)\cup\{m+n+1\})\setminus\{g(m,n),n-2m\}\end{aligned}$$

である。これより、

$$\bar{l}(m,n+1)=\big((\bar{l}(m,n)-1)\cup\{3m\}\big)\setminus\{h(m,n)-1,-1\}$$

となる。$h(m,n)$ は (1) により、$\bar{u}(m,n)$, $\bar{d}(m,n)$, $\bar{l}(m,n)$ から定まる。したがって、$\bar{l}(m,n+1)$ は $\bar{u}(m,n)$, $\bar{d}(m,n)$, $\bar{l}(m,n)$ が与えられれば、自動的に定まる。以上により、$\{0,1,2,\ldots,3m\}$ の 3 つの部分集合 $\bar{u}(m,n)$, $\bar{d}(m,n)$, $\bar{l}(m,n)$ から、$\bar{u}(m,n+1)$, $\bar{d}(m,n+1)$, $\bar{l}(m,n+1)$ を作り出すルールが分かったが、$\{0,1,2,\ldots,3m\}$ の部分集合は 2^{3m+1} 通りであるので、ある $r>0$ に対して、

$$\bar{u}(m,n+rp)=\bar{u}(m,n),\quad \bar{l}(m,n+rp)=\bar{l}(m,n),\quad \bar{d}(m,n+rp)=\bar{d}(m,n)$$

となる。これは、$h(m,n+rp)=h(m,n)$ を意味する。 □

● 逆形のマヤゲームの特異局面

連載第 12 回（2010 年 3 月号）では、n コインのマヤゲームについて、

$$\mathcal{F}=\{\,(m_1,\ldots,m_n)\mid m_i=i-1 \text{ または } 2n-i\}$$

とおき、

$$\mathcal{F}^{(0)} = \{\,(m_1,\ldots,m_n) \in \mathcal{F} \mid m_i \geq n \text{ となる } i \text{ は偶数個}\}$$
$$\mathcal{F}^{(1)} = \{\,(m_1,\ldots,m_n) \in \mathcal{F} \mid m_i \geq n \text{ となる } i \text{ は奇数個}\}$$

とすると、

(∗) $\mathcal{F}^{(0)}, \mathcal{F}^{(1)}$ は定理 12.8 の条件 (1) ∼ (5) を満たす。

したがって、$\mathcal{F}$ がマヤゲームの特異局面の全体であることを述べました。ここでは、(∗) の証明を与えます。

【(∗) の証明】 (1) 終了局面は $(0,1,\ldots,n-1)$ のみで $\mathcal{F}^{(0)}$ に含まれている。また、$\mathcal{F}^{(0)} \cap \mathcal{F}^{(1)} = \emptyset$ は明らかである。

(2) $P = (m_1,\ldots,m_n) \in \mathcal{F} - \mathcal{E}$ とする。このとき、$m_i \geq n$ となる i が少なくとも 1 個存在する。そこで、$m_i' = 2n-1-m_i$ とおけば、$m_i \geq n > m_i'$ だから、$P \to P' := (m_1,\ldots,m_{i-1},m_i',m_{i+1},\ldots,m_n)$ かつ $P' \in \mathcal{F}$ である。$P \in \mathcal{F}^{(0)}$ ならば $P' \in \mathcal{F}^{(1)}$, $P \in \mathcal{F}^{(1)}$ ならば $P' \in \mathcal{F}^{(0)}$ であることも明らかである。これより、(3) が成り立っていることも分かる。

(4) $P = (m_1,\ldots,m_n) \notin \mathcal{F}$ とする。このとき、

(a) $m_i \geq 2n$ となる i が存在する

(b) $m_i + m_j = 2n-1$ となる i,j が存在する

のいずれかが成り立っている。まず、(a) が成り立っているとし、$P \to P'$ で $P' \in \mathcal{F}$ だとする。このとき、P' は $m_i \geq 2n$ となっている m_i を m_i' ($< 2n$) に減らすことによって得られる。ここで、m_i を $m_i'' = 2n - m_i' - 1$ に減らした局面を P'' とすると、P'' も $\mathcal{F}$ に属す。P' と P'' の一方が $\mathcal{F}^{(0)}$ に属すならば、他方は $\mathcal{F}^{(1)}$ に属す。これは、条件 (4) が成り立つことを示している。次に (a) は成り立たないが、(b) が成り立っているとする。このとき、ある k $(0 \leq k \leq n-1)$ があって、k と $2n-k-1$ は $m_1,\ldots,m_n$ の中には現れない。したがって、$P \to P'$ で $P' \in \mathcal{F}$ だとすると、m_i, m_j のどちらか片方を $k, 2n-k-1$ のどちらか一方に減らすことで P' が得られている。$m_i < m_j$ だとして $m_j > 2n-k-1$ ならば、m_j を $2n-k-1$ に減らすことも k に減らすこともできる。もし、$m_j < 2n-k-1$ ならば、m_j を k に減らすことも m_i を k に減らすこともできる。これでいずれの場合にも、$\mathcal{F}^{(0)}$ に属す局面に移行することも、$\mathcal{F}^{(1)}$ に属す局面に移行することも、どちらも可能であることが分かった。

(5) $P = (m_1,\ldots,m_n) \in \mathcal{F}$ で、 $P \to P'$ $(P' \notin \mathcal{F})$ という移行が可能だとする。この移行が $m_i \to m_i'$ $(m_i > m_i')$ として得られているとすると、$m_j = 2n - m_i' - 1$ となる m_j が存在する（(4) の証明の (b) のケース)。このとき、$m_j' = 2n - m_i - 1 < 2n - m_i' - 1 = m_j$ だから、$m_j \to m_j'$ とすれば $P' \to P''$ で $P'' \in \mathcal{F}$ である。 □