Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **61** (1991), 231–242

Galoiskohomologie reeller halbeinfacher algebraischer Gruppen

Von TH. GEISSER

Einleitung

In der Arbeit 'Über einen Satz von E.Cartan' von G.HARDER [5] wurde folgender Satz bewiesen:

> 'Eine halbeinfache, einfach zusammenhängende reelle algebraische Gruppe mit reellem anisotropem maximalem Torus ist genau dann anisotrop, wenn jedes Weylgruppenelement dieses Torus einen reellen Repräsentanten hat.'

Dabei wurden Methoden der Galoiskohomologie verwandt (lediglich die Existenz der anisotropen Form wurde vorausgesetzt); anschließend wurden daraus Folgerungen gewonnen, die bis dahin nur unter Ausnutzung der Tatsache, daß anisotrope reelle algebraische Gruppen als kompakte Liegruppen aufgefaßt werden können, bewiesen wurden.
In der vorliegenden Arbeit wird nun obiger Satz (hier Theorem I) mit Killingformargumenten und Methoden der Galoiskohomologie bewiesen (ohne die Existenz der anisotropen Form vorauszusetzen). Darüber hinaus wird ein rein algebraischer Beweis der Isomorphie $T_2/W \simeq H^1(\Gamma, G)$ für anisotrope Gruppen G mit maximalem Torus T gegeben (Theorem III), für die es bisher nur Beweise gibt, die transzendente Methoden benutzen, z.B. wird in SERRE [8] die Exponentialabbildung benutzt.
Die vorliegende Arbeit ist eine Zusammenfassung einer Diplomarbeit an der Universität Bonn bei G.HARDER, die von einer Vorlesung über die Galoiskohomologie reeller Gruppen im Wintersemester 1988/89 angeregt wurde. Ich möchte mich bei G.HARDER und R.PINK für wertvolle Hinweise bedanken.
Für die Körpererweiterung $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ mit Galoisgruppe Γ benutzen wir im folgenden die Identifizierung $H^1(\Gamma, G) = \{a \in G \mid a\bar{a} = 1\}/\sim$, wobei $\sim$ die Elemente a mit $b^{-1}a\bar{b}$ identifiziert. Wenn wir von Tori sprechen, so sind stets über $\mathbb{R}$ definierte Tori gemeint.

Kohomologie von Tori

Für einen anisotropen Torus operiert das nichttriviale Element der Galoisgruppe auf dem Charaktermodul $X(T)$ als Involution ohne Eigenwert 1, also operiert es durch Multiplikation mit -1. Wählen wir eine Basis λ_i von $X(T)$, so verifiziert man sofort, daß durch die Abbildung

$$t \mapsto (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$$

für spaltende Tori ein Isomorphismus $T \to (G_m)^n$ und für anisotrope Tori ein Isomorphismus $T \to (\mathbf{S}^1)^n$ definiert ist, wobei $\mathbf{S}^1$ die multiplikative Gruppe von $\mathbb{C}$ mit Konjugation $z \mapsto \overline{z^{-1}}$ sei. Für spaltende Tori sind dann die reellen Punkte isomorph zu $(\mathbb{R}^*)^n \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$, während für anisotrope Tori die reellen Punkte isomorph zu $(\mathbf{S}^1)^n \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$ sind.
Nach Hilberts Satz 90 ist für spaltende Tori S die erste Kohomologie $H^1(\Gamma, S)$ trivial; wir wollen uns nun mit der Kohomologie anisotroper Tori beschäftigen:

Lemma 1. *Sei $T \to T' \to 1$ eine Surjektion anisotroper Tori. Dann ist die induzierte Abbildung auf den reellen Punkten $T(\mathbb{R}) \to T'(\mathbb{R})$ auch surjektiv.*

Beweis. Da T' Produkt von $\mathbf{S}^1$ ist, können wir annehmen, daß $T' \simeq \mathbf{S}^1$ ist; wir wählen nun eine $\mathbf{S}^1 \subseteq T$, die nicht im Kern unserer Abbildung ist, haben also eine nichttriviale Abbildung $\mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$. Die Endomorphismengruppe der $\mathbf{S}^1$ besteht aber aus den Endomorphismen $a \mapsto a^n$ ($n \in \mathbb{Z}$), und diese sind offensichtlich surjektiv auf den reellen Punkten.

Satz 2. *Sei T anisotroper Torus. Dann ist $H^1(\Gamma, T) \simeq (\pm 1)^{\dim T} \simeq T_2$, der 2-Torsion des Torus.*

Beweis. Die Bildung der Kohomologiemenge ist verträglich ist mit Produkten und wir haben gesehen, daß ein anisotroper Torus Produkt von Gruppen des Typs $\mathbf{S}^1$ ist, es ist also $H^1(\Gamma, T) \simeq \prod H^1(\Gamma, \mathbf{S}^1)$. Man beachte nun noch, daß die Kohomologie von $\mathbf{S}^1$ gleich $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist, wobei wir als Repräsentanten die 2-Torsion wählen können.

Lemma 3. *Seien T, T' zwei über $\mathbb{R}$ definierte anisotrope (oder spaltende) Tori und $f\colon T \to T'$. Dann ist f schon über $\mathbb{R}$ definiert. Insbesondere ist für eine Konjugation $\operatorname{Int} a\colon T \to T'$ die Konjugation $\operatorname{Int} a^{-1}\bar{a}$ auf T die Identität.*

Beweis. Zum Beweis beachte man, daß die Kategorie der reellen Tori mit Operation von $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ antiisomorph ist zur Kategorie der freien $\mathbb{Z}$-Moduln mit Operation von $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ vermittels $T \mapsto X(T)$ und verifiziert, daß die von f induzierte Abbildung auf den Charaktermoduln galoisinvariant ist.

Das Beispiel A_1

1) Bekanntlich gibt es die folgenden Formen der A_1:

	einf. zshgd.	adjungiert	reelle Punkte der Liealgebra
spaltend	SL_2	PGL_2	$sl_2(\mathbb{R}) = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Spur} X = 0\}$
anisotrop	SU_2	PSU_2	$su_2(\mathbb{R}) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Spur} X = 0, -\overline{X} = X\}$

2) Betrachte die anisotropen Tori $T = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) \mid a^2 + b^2 = 1\}$ von SL_2 bzw. T/Z von PGL_2 und $T = \{\left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbf{S}^1\}$ von SU_2 bzw. T/Z von PSU_2. Die Weylgruppe $N(T)/T$ dieser Gruppen ist zweielementig, und wir wollen untersuchen, wann das nichttriviale Element s_α einen reellen Repräsentanten hat:

Für SU_2 und PSU_2 ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ein solcher Repräsentant.

Für SL_2 finden wir keinen reellen Repräsentanten: Über $\mathbb{C}$ wird s_α repräsentiert durch $\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$, gäbe es nun einen reellen Repräsentanten, so ließe es sich schreiben als $\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ mit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) \in T$, und es wäre

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\bar{a} & -\bar{b} \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix},$$

also $a = -\bar{a}$, $b = -\bar{b}$, was der Tatsache $a^2 + b^2 = 1$ widerspricht.

Für PGL_2 dagegen ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot Z$ ein reeller Repräsentant.

3) Nun wollen wir zeigen, daß alle anisotropen Tori in den behandelten Gruppen über $\mathbb{R}$ konjugiert sind. Offenbar genügt es, dies für die einfach zusammenhängenden Formen zu zeigen. Für SU_2 ist die Behauptung Korollar 10, während wir im Fall SL_2 zeigen werden, daß alle anisotropen Tori zum Torus $T = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) \mid a^2 + b^2 = 1\}$ konjugiert sind:

Sei T' ein weiterer anisotroper Torus, T und T' sind über $\mathbb{C}$ konjugiert, $T' = gTg^{-1}$, und $\xi = g^{-1}\bar{g}$ ist ein Kozykel in $H^1(\Gamma, T)$, da nach Lemma 3 gilt: $g^{-1}\bar{g} \in C_G(T) = T$. Wir wissen, daß $H^1(\Gamma, T) = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\}$ ist, und wir können annehmen, daß $\xi \sim \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ist (sonst ist nichts mehr zu zeigen). Wenn wir nun s_α durch $\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$ repräsentieren, so ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \overline{\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, d.h. $[\xi]$ läßt sich als $\delta(s_\alpha)$ schreiben. Dann ist aber $i_*(\xi) = 1$ bei der Abbildung $i_*: H^1(\Gamma, T) \to H^1(\Gamma, N(T))$, d.h. $g^{-1}\bar{g} = n^{-1}\bar{n}$ für ein $n \in N(T)$, und gn^{-1} ist eine reelle Konjugation von T nach T'.

4) Für die Killingform der Liealgebren gilt folgendes:

Für $sl_2(\mathbb{R})$ hat die Killingform Signaturtyp $(2, 1)$ (d.h. einen Eigenwert -1 und zwei Eigenwerte 1).

Für $su_2(\mathbb{R})$ ist die Killingform negativ definit.

(Da PSU_2 durch die adjungierte Darstellung auf su_2 operiert und die Killingform invariant unter der adjungierten Darstellung ist, finden wir hier die bekannte Isomorphie $PSU_2 \simeq SO_3$ wieder.)

Der erste Hauptsatz

Sei T maximaler Torus einer Gruppe G, α eine Wurzel von T, U_α die eindeutig bestimmte Untergruppe von G, die zur additiven Gruppe G_a vermittels

$$\epsilon_\alpha: G_a \to U_\alpha \qquad \text{mit} \quad t\epsilon_\alpha(x)t^{-1} = \epsilon_\alpha(\alpha(t)x)$$

isomorph ist, H_α die von U_α und $U_{-\alpha}$ erzeugte Gruppe und $T_\alpha = T \cap H_\alpha$. Man verifiziert leicht, daß für einen anisotropen Torus T gilt: $\overline{U_\alpha} = U_{\bar{\alpha}} = U_{-\alpha}$, d.h. H_α ist eine einfache reelle Gruppe vom Typ A_1 mit maximalem Torus T_α. Nach CHEVALLEY [3] sind die Gruppen H_α einfach zusammenhängend falls G einfach zusammenhängend ist.

Lemma 4. *Seien alle Untergruppen der Form H_α bezüglich eines anisotropen Torus anisotrop. Dann ist die Killingform auf $\mathscr{L}(G)$ negativ definit.*

Beweis. Betrachte die Zerlegung

$$\mathscr{L}(G) = \mathscr{L}(T) \oplus \bigoplus_{\alpha>0} \mathscr{L}(G) \cap (\mathscr{G}_\alpha \oplus \mathscr{G}_{-\alpha}),$$

wobei $\mathscr{G}_\alpha$ die komplexe Liegalgebra zur Untergruppe U_α ist (wegen $\overline{U_\alpha} = U_{-\alpha}$ ist $\mathscr{G}_\alpha \oplus \mathscr{G}_{-\alpha}$ reell), siehe HUMPHREYS [6], Paragraph 8. Dann sind bezüglich der Killingform von $\mathscr{L}(G)$ die $\mathscr{L}(G) \cap (\mathscr{G}_\alpha \oplus \mathscr{G}_{-\alpha})$ senkrecht zu allen $\mathscr{L}(G) \cap (\mathscr{G}_\beta \oplus \mathscr{G}_{-\beta})$ (für $\alpha \neq \pm\beta$) und zu $\mathscr{L}(T)$. Es genügt also zu zeigen, daß die Killingform eingeschränkt auf $\mathscr{L}(T)$ und auf $\mathscr{L}(H_\alpha) \supseteq \mathscr{L}(G) \cap (\mathscr{G}_\alpha \oplus \mathscr{G}_{-\alpha})$ negativ definit ist.
Dazu wähle eine komplexe Basis von $\mathscr{L}(T) \otimes \mathbf{C}$ bestehend aus Elementen $\mathbf{t}_\alpha$ für ein System einfacher Wurzeln, wobei $\mathbf{t}_\alpha$ für eine beliebige Wurzel gegeben ist durch die definierende Beziehung: $\kappa(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}) = \alpha(\mathbf{t})\ \forall \mathbf{t} \in \mathscr{L}(T) \otimes \mathbf{C}$. Da Γ durch -1 auf X(T) operiert, rechnet man sofort nach, daß $\overline{\mathbf{t}_\alpha} = -\mathbf{t}_\alpha$ gilt. Folglich sind die $i\mathbf{t}_\alpha$ reell und bilden ein reelles Erzeugendensystem von $\mathscr{L}(T)$. Aber wegen $(\alpha, \beta) := \kappa(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\beta)$ ist die Killingform auf dem Vektorraum $\langle \mathbf{t}_\alpha \rangle \otimes \mathbf{R}$ positiv definit, also ist die Killingform eingeschränkt auf $\mathscr{L}(T)$ negativ definit.

Nun gibt es bis auf eine komplexe Konstante genau eine assoziative, nichtdegenerierte Bilinearform auf $\mathscr{L}(H_\alpha) \otimes \mathbb{C}$, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen und die Liealgebra einfach ist. Um also zu zeigen, daß die Killingform von $\mathscr{L}(G)$ auf $\mathscr{L}(H_\alpha)$ negativ definit ist, genügt es zu zeigen, daß sich die Killingform κ_α von $\mathscr{L}(H_\alpha)$ und die Killingform κ von $\mathscr{L}(G)$ eingeschränkt auf $\mathscr{L}(H_\alpha)$ nur um eine positive reelle Konstante unterscheiden, denn die Killingform von $\mathscr{L}(H_\alpha)$ ist nach dem Beispiel A_1 negativ definit. Aber für das Element $i\mathbf{t}_\alpha$ sind sowohl $\kappa_\alpha(i\mathbf{t}_\alpha, i\mathbf{t}_\alpha)$ als auch $\kappa(i\mathbf{t}_\alpha, i\mathbf{t}_\alpha)$ negative reelle Zahlen.

Satz 5. *Für eine Gruppe G sind äquivalent:*

i) *G ist anisotrop.*

ii) *Die Killingform von $\mathscr{L}(G)$ ist negativ definit.*

iii) *$G(\mathbb{R})$ ist eine kompakte Liegruppe.*

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Ist G anisotrop, so müssen auch alle Untergruppen H_α anisotrop sein. Nun wenden wir Lemma 4 an.
ii) $\Rightarrow$ i): Jeder Torus S operiert durch die adjungierte Darstellung auf $\mathscr{L}(G)$, und wenn S spaltend ist, also alle Charaktere reell sind, läßt sich diese Darstellung über $\mathbb{R}$ diagonalisieren, d.h.

$$\mathscr{L}(G) = \bigoplus_{\lambda \in X(S)} V_\lambda, \qquad V_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathscr{L}(G) \mid \operatorname{Ad} s(\mathbf{x}) = \lambda(s)\mathbf{x}\ \ \forall s \in S(\mathbb{R})\}.$$

Dabei gibt es einen Charakter $\lambda \neq 0$ von S mit $V_\lambda \neq \{0\}$, denn sonst würde S trivial auf $\mathscr{L}(G)$ operieren, und es wäre S zentral in G nach HUMPHREYS [7], Theorem 13.4, ein Widerspruch zur Halbeinfachheit von G.
Andererseits ist die Killingform invariant unter der adjungierten Darstellung, für $\mathbf{x} \in V_\lambda$ und $s \in S(\mathbb{R})$ gilt also $\kappa(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \kappa(\operatorname{Ad} s(\mathbf{x}), \operatorname{Ad} s(\mathbf{x})) = \lambda^2(s)\kappa(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Wenn $\lambda \neq 0$ ist, können wir ein $s \in S(\mathbb{R})$ finden mit $\lambda(s) \neq \pm 1$. Dann ist aber $\kappa(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$, und dies ist ein Widerspruch zu $V_\lambda \neq \{0\}$ und der Definitheit der Killingform.
i) $\Leftrightarrow$ iii): ist das Korollar 9.4 aus BOREL-TITS [2].

Betrachte nun die exakte Kohomologiesequenz

$$N(T)(\mathbb{R}) \to W \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, T) \to H^1(\Gamma, N(T))$$

(beachte $W = W(\mathbb{R})$, denn weil σ durch -1 auf $X(T)$ operiert, gilt: $\overline{w}(\chi) = \overline{w(\overline{\chi})} = w(\chi)$.)
Es folgt unmittelbar aus der Definition von δ, daß $w \in W$ genau dann einen reellen Repräsentanten hat, wenn $\delta(w) = 1$ ist. Dies hat folgende Konsequenz:

Lemma 6. *Sei T anisotroper maximaler Torus einer Gruppe G und die Untergruppe H_α von G einfach zusammenhängend. Dann ist H_α genau dann anisotrop, wenn $\delta(s_\alpha) = 1$ ist für die Spiegelung s_α an α in der Weylgruppe von T.*

Beweis. Anisotrope Untergruppen H_α haben nach Beispiel A_1 reelle Repräsentanten für die Spiegelung an α in ihrer Weylgruppe, es genügt also zu zeigen, daß jedes Element $n \in N_{H_\alpha}(T_\alpha)$, das die Spiegelung an α im Wurzelsystem von H_α induziert, auch im Wurzelsystem von G die Spiegelung an α induziert.
Dazu verifiziert man zunächst $n \in N_G(T)$ und rechnet dann nach, daß n auf α durch -1 operiert und alle Wurzeln senkrecht zu α festläßt.
Gebe es nun umgekehrt einen reellen Repräsentanten der Spiegelung an α; wir wollen zunächst zeigen, daß wir dann auch in H_α einen reellen Repräsentanten der Spiegelung an α finden können. Sei dazu n beliebiger Repräsentant der Spiegelung an α in $N_{H_\alpha}(T_\alpha)$, dann liegt $n^{-1}\overline{n}$ in $H^1(\Gamma, T_\alpha)$ und muß dort nach Voraussetzung berandet sein, da die Abbildung $H^1(\Gamma, T_\alpha) \to H^1(\Gamma, T)$ nach Satz 2 injektiv ist. Dann folgt aber aus $n^{-1}\overline{n} = t^{-1}\overline{t}$ mit $t \in T_\alpha$, daß nt^{-1} ein reeller Repräsentant der Spiegelung an α in H_α ist.
Da H_α einfach zusammenhängend ist, muß nun H_α anisotrop sein nach dem Beispiel A_1.

Damit können wir ein einfaches Kriterium dafür angeben, wann eine einfach zusammenhängende Gruppe G anisotrop ist:

Theorem I. *Sei G einfach zusammenhängende Gruppe und $T \subseteq G$ maximaler anisotroper Torus von G. Dann sind äquivalent:*

i) *Die Gruppe G ist anisotrop.*

ii) $\delta(s_\alpha) = 1$ *für alle Spiegelungen s_α an einer einfachen Wurzel $\alpha \in \Pi$.*

iii) $\delta(w) = 1$ *für alle Weylgruppenelemente* $w \in W$.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Mit G sind auch alle Untergruppen H_α anisotrop, und die Behauptung folgt aus dem Lemma 6.
ii) $\Rightarrow$ iii): folgt sofort aus der Tatsache, daß die Weylgruppe von Spiegelungen an einfachen Wurzeln erzeugt wird.
iii) $\Rightarrow$ i): Da mit G auch alle Untergruppen H_α einfach zusammenhängend sind, können wir wieder Lemma 6 anwenden und sehen, daß alle Untergruppen H_α anisotrop sind. Nach Lemma 4 ist dann die Killingform auf $\mathscr{L}(G)$ negativ definit und nach Satz 5 die Gruppe G anisotrop.

Korollar 7. *Zu jeder Gruppe gibt es eine anisotrope Form.*

Beweis. Es genügt, die Behauptung für einfach zusammenhängende Gruppen zu beweisen. Wir wollen die spaltende Form derart twisten, daß die Untergruppen H_α zu einfachen Wurzeln α eines anisotropen Torus anisotrop sind, denn dann ist nach dem Lemma 6 $\delta(s_\alpha) = 1$ für alle einfachen Wurzeln und damit nach Theorem I die Gruppe anisotrop.
Sei also G_s einfach zusammenhängend und spaltend. Wähle einen spaltenden maximalen Torus S in G_s, ein System einfacher Wurzeln von S und in der Liealgebra von G_s zu jeder einfachen Wurzel α reelle Elemente $\mathbf{x}_\alpha \in \mathscr{G}_\alpha$, $\mathbf{x}_{-\alpha} \in \mathscr{G}_{-\alpha}$ mit $\kappa(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_{-\alpha}) = \frac{2}{(\alpha,\alpha)}$ (wir können solche Elemente finden, da die Untergruppen U_α und damit auch $\mathscr{G}_\alpha = \mathscr{L}(U_\alpha)$ wegen $\overline{U_\alpha} = U_{\bar{\alpha}} = U_\alpha$ für einen spaltenden Torus reell sind).
Betrachte nun den Automorphismus von $\mathscr{L}(G_s) \otimes \mathbb{C}$, der auf $\mathscr{L}(S) \otimes \mathbb{C}$ durch -1 operiert und $\mathbf{x}_\alpha$ nach $-\mathbf{x}_{-\alpha}$ abbildet. Nach HUMPHREYS [6], Theorem 14.2 gibt es genau einen solchen Automorphismus, und wegen $\operatorname{Aut} G_s(\mathbb{C}) \simeq \operatorname{Aut}(\mathscr{L}(G_s) \otimes \mathbb{C})$ entspricht dies einem Automorphismus ϕ von $G_s(\mathbb{C})$. Nach Konstruktion ist $\phi^2 = \mathrm{id}$, und da wir $\mathbf{x}_\alpha$ reell gewählt haben, bildet ϕ einen Kozykel.
Wenn wir mit ϕ twisten, so operiert die Galoisgruppe durch -1 auf $\mathscr{L}(S) \otimes \mathbb{C}$, d.h. S ist mit der neuen Operation der Galoisgruppe anisotrop. Weiterhin ändert sich die Konjugation zu $\overline{\mathbf{x}_\alpha} = -\mathbf{x}_{-\alpha}$ für unser System einfacher Wurzeln. Dann ist aber die Abbildung

$$\mathbf{x}_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{-\alpha} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus $\mathscr{L}(H_\alpha) \simeq su_2(\mathbb{C})$, d.h. ${}_\phi H_\alpha$ die anisotrope Form für alle Untergruppen H_α zu einfachen Wurzeln $\alpha \in \Pi$, was zu zeigen war.

Satz 8. *Sei T maximaler Torus in einer anisotropen Gruppe G, H_α die Untergruppe zu einer Wurzel α von T und $t \in T_2$ ein Kozykel in* $\operatorname{Aut} G$. *Dann spaltet ${}_tH_\alpha$ genau dann, wenn $\alpha(t) = -1$ ist.*

Beweis. Betrachte den Zentralisator $C_G(\ker^\circ \alpha) = DC_G(\ker^\circ \alpha) \cdot ZC_G(\ker^\circ \alpha)$. Nach BOREL-TITS [2], 2.3 ist $DC_G(\ker^\circ \alpha) = H_\alpha$ und $ZC_G(\ker^\circ \alpha) = \ker^\circ \alpha$, insbesondere gilt

$$C_G(\ker^\circ \alpha)/\ker \alpha = H_\alpha \cdot \ker \alpha/\ker \alpha \simeq H_\alpha/H_\alpha \cap \ker \alpha = H_\alpha/ZH_\alpha \simeq \operatorname{Aut} H_\alpha .$$

Weiterhin erhalten wir folgende Sequenz von Abbildungen:

$$T \xrightarrow{p} T/\ker \alpha \xrightarrow{i} C_G(\ker^\circ \alpha)/\ker \alpha \simeq \operatorname{Aut} H_\alpha .$$

Wenn wir darauf den Funktor H^1 anwenden, so erhalten wir

$$H^1(\Gamma, T) \xrightarrow{p_*} H^1(\Gamma, T/\ker \alpha) \xrightarrow{i_*} H^1(\Gamma, \operatorname{Aut} H_\alpha) .$$

Nun ist i_* ein Isomorphismus, denn $T/\ker \alpha$ ist anisotroper maximaler Torus von $H_\alpha \cdot \ker \alpha/\ker \alpha \simeq \operatorname{Aut} H_\alpha$ und für die Gruppe PSU_2 ist die Abbildung $H^1(\Gamma, T) \to H^1(\Gamma, \mathrm{PSU}_2)$ eine Bijektion zweielementiger Mengen. Andererseits sehen wir mit Hilfe des aus $T/\ker \alpha \xrightarrow{\alpha} \mathbf{S}^1$ resultierenden Isomorphismus $H^1(\Gamma, T/\ker \alpha) \xrightarrow{\alpha_*} H^1(\Gamma, \mathbf{S}^1) \simeq \{\pm 1\}$, daß der Kozykel t genau dann nichttriviales Bild in $H^1(\Gamma, \operatorname{Aut} H_\alpha)$ hat, wenn $\alpha(t) = -1$ ist.

Korollar 9. *Sei G eine anisotrope Gruppe mit maximalem Torus T. Dann wird bei der Abbildung $i_*: H^1(\Gamma, T) \to H^1(\Gamma, G)$ nur das Einselement auf das Einselement abgebildet.*

Beweis. Wenn es zu einem Kozykel $t \in H^1(\Gamma, T) \simeq T_2$ eine Wurzel α mit $\alpha(t) = -1$ gibt, so spaltet ${}_tH_\alpha$, und ${}_tG$ kann nicht die anisotrope Form sein. Falls also das Bild von t trivial wird in $H^1(\Gamma, G)$, so ist für alle Wurzeln α der Wert $\alpha(t) = 1$, d.h. t liegt im Zentrum Z von G, und es genügt zu zeigen, daß bei der Abbildung $H^1(\Gamma, Z) \to H^1(\Gamma, G)$ nur das Einselement auf das Einselement abgebildet wird. Wenn wir die folgende exakte Sequenz

$$G(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{G}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, Z) \longrightarrow H^1(\Gamma, G)$$

betrachten, wo $\overline{G}$ die adjungierte Gruppe zu G ist, so ist dies äquivalent dazu, daß die Abbildung $G(\mathbb{R}) \to \overline{G}(\mathbb{R})$ surjektiv ist.
Die Surjektivität rechnet man nun für halbeinfache und unipotente Element getrennt aus unter Benutzung der Tatsache, daß halbeinfache Elemente in einem maximalen reellen Torus liegen, Lemma 1 und der Tatsache, daß eine anisotrope halbeinfache Gruppe keine unipotenten reellen Elemente enthält (BOREL-TITS [2], Korollar 8.5).

Korollar 10. *Sei G anisotrope Gruppe. Dann sind je zwei maximale Tori T und T' schon über $\mathbb{R}$ konjugiert.*

Beweis. Bekanntlich sind T und T' durch ein Element $a \in G(\mathbb{C})$ konjugiert. Nach Lemma 3 ist dann $\operatorname{Int} a^{-1}\overline{a}$ auf T die Identität, also $t := a^{-1}\overline{a} \in C_G(T) = T$, und t ist ein in G berandeter Kozykel von T. Aber aus Korollar 9 folgt dann, daß t schon in T berandet ist, d.h. $t = s^{-1}\overline{s} \Rightarrow as^{-1} = \overline{as^{-1}}$, und as^{-1} ist ein reelles Element, das T nach T' konjugiert.

Korollar 11. *Für eine anisotrope Gruppe G und einen maximalen Torus T in G ist die Abbildung $H^1(\Gamma, T) \to H^1(\Gamma, G)$ surjektiv.*

Beweis. Sei $a = a_s a_u$ die Zerlegung eines Kozykels a in halbeinfachen und unipotenten Anteil, dann ist die Zerlegung von $a^{-1} = \bar{a}$ gegeben durch $\bar{a} = \bar{a}_s \bar{a}_u$, d.h. aber $\bar{a}_u = a_u^{-1}$. Die von a_u erzeugte Untergruppe U ist wegen $\bar{a}_u = a_u^{-1}$ über $\mathbb{R}$ definiert und isomorph zur additiven Gruppe G_a (siehe Humphreys [7], Prop. 15.1C). Wegen $H^1(\Gamma, G_a) = 0$ können wir also a_u als $u^{-1}\bar{u}$ schreiben. Aber dann ist

$$a = a_u a_s = u^{-1}\bar{u}a_s = u^{-1}\bar{u}a_s\bar{u}^{-1}\bar{u},$$

folglich ist a als Kozykel äquivalent zum halbeinfachen Element $a' = \bar{u}a_s\bar{u}^{-1}$. Wähle nun einen maximalen reellen Torus T', der a' enthält. Nach Korollar 10 ist T' zu T reell konjugiert, wir haben also für ein $r \in G(\mathbb{R})$: $T' = rTr^{-1} \Rightarrow a' = rtr^{-1} = \bar{r}tr^{-1}$ für ein $t \in T(\mathbb{C})$, was zu zeigen war.

Der zweite Hauptsatz

Wir haben gesehen, daß die natürliche Abbildung $T_2 \to H^1(\Gamma, G)$ über W faktorisiert und surjektiv ist; wir wollen nun zeigen, daß sie injektiv ist. Dazu werden wir die äquivalente Aussage beweisen, daß in allen inneren Formen von G die anisotropen maximalen Tori über $\mathbb{R}$ konjugiert sind.

Sei G anisotrop, T maximaler Torus in G und ${}_tG$ die mit $t \in H^1(\Gamma, \overline{T})$ getwistete Form von G. Dann ist T auch in ${}_tG$ ein anisotroper Torus.

Lemma 12. *Für eine einfache anisotrope Gruppe G ist $T_2/W \simeq H^1(\Gamma, G)$ genau dann, wenn alle anisotropen maximalen Tori der mit $t \in T_2$ getwisten Formen ${}_tG$ über $\mathbb{R}$ konjugiert sind.*

Beweis. Die natürliche Operation der Weylgruppe auf T ist dieselbe Operation wie die Operation durch $t \mapsto n^{-1}t\bar{n}$ für $n \in N(T)$, da jedes Weylgruppenelement für eine anisotrope Gruppe einen reellen Repräsentanten hat. Daher ist die Behauptung $T_2/W \simeq H^1(\Gamma, G)$ äquivalent dazu, daß zwei Kozykel t, $t' \in T_2$ genau dann äquivalent in $H^1(\Gamma, G)$ sind, wenn sie schon in $H^1(\Gamma, N_G(T))$ äquivalent sind.
Seien also die anisotropen maximalen Tori der mit $t \in T_2$ getwisteten Formen ${}_tG$ konjugiert und $g \in G(\mathbb{C})$ mit $t' = g^{-1}t\bar{g}$ für t, $t' \in T_2$. Dann ist $\operatorname{Int} g^{-1}$ ein reeller Isomorphismus von ${}_tG$ auf ${}_{t'}G$. Nach Voraussetzung sind die anisotropen Tori T und $g^{-1}Tg$ über $\mathbb{R}$ konjugiert in ${}_{t'}G$, d.h. $rTr^{-1} = g^{-1}Tg$, wobei $r \in {}_{t'}G(\mathbb{R})$ bedeutet: $r = t'\bar{r}t'^{-1}$. Wir haben dann $gr \in N_G(T)$, und es gilt $r = t'\bar{r}t'^{-1} \iff t' = r^{-1}t'\bar{r} = (gr)^{-1}t\overline{(gr)}$; also ist gr ein Element in $N_G(T)$ mit der gewünschten Eigenschaft.
Sei umgekehrt T' ein anisotroper maximaler Torus in ${}_tG$, es genügt zu zeigen, daß T' zu T konjugiert ist. Da $T' = gTg^{-1}$ für ein $g \in {}_tG(\mathbb{C})$ ist, ist $s := g^{-1}tgt^{-1} \in T$ ein Kozykel nach Lemma 3. Aus $st = g^{-1}t\bar{g}$ folgt dann,

daß st und t in $H^1(\Gamma, G)$, also nach Voraussetzung auch in $H^1(\Gamma, N_G(T))$ äquivalent sind, d.h. es gibt ein $n \in N_G(T)$ mit $st = n^{-1} t \bar{n}$. Das Element gn^{-1} ist dann ein reelles Element von ${}_tG$, das T in T' konjugiert.

Satz 13. *Sei G anisotrop, T maximaler Torus in G und $t \in \overline{T}_2$. Wenn wir mit n den Rang von G, mit m die Anzahl der positiven Wurzeln α mit $\alpha(t) = -1$ und mit p die Anzahl der positiven Wurzeln α mit $\alpha(t) = 1$ bezeichnen, so ist die Signatur der Killingform der mit t getwisteten Gruppe ${}_tG$ gleich $2(m-p)-n$.*

Beweis. Betrachte die Zerlegung in der mit t getwisteten Gruppe ${}_tG$:

$$\mathscr{L}({}_tG) = \mathscr{L}(T) \oplus \bigoplus_{\alpha>0} \mathscr{L}({}_tG) \cap (\mathscr{G}_\alpha \oplus \mathscr{G}_{-\alpha}).$$

Dabei stehen die $\mathscr{L}({}_tG) \cap (\mathscr{G}_\alpha \oplus \mathscr{G}_{-\alpha})$ bezüglich der Killingform senkrecht auf den $\mathscr{L}({}_tG) \cap (\mathscr{G}_\beta \oplus \mathscr{G}_{-\beta})$ (für $\alpha \neq \beta$) und auf $\mathscr{L}(T)$. Für den anisotropen Torus T von ${}_tG$ erhalten wir n Eigenwerte -1 der Killingform auf $\mathscr{L}(T)$. Nun haben wir im Beispiel A_1 gesehen, daß die Killingform für spaltendes ${}_tH_a$ Signaturtyp $(2,1)$ hat, während sie für anisotropes ${}_tH_\alpha$ Signaturtyp $(0,3)$ hat. Um die Killingform auf $\mathscr{L}({}_tG) \cap (\mathscr{G}_\alpha \oplus \mathscr{G}_{-\alpha})$ zu berechnen, müssen wir davon jeweils einen Eigenwert -1 abziehen, der in $\mathscr{L}({}_tH_\alpha) \cap \mathscr{L}(T)$ liegt. Andererseits haben wir im zweiten Kapitel gesehen, daß ${}_tH_\alpha$ in ${}_tG$ genau dann spaltet, wenn $\alpha(t) = -1$ ist.

Bemerkung. i) Wenn G die spaltende Form ist, dann haben wir einen spaltenden maximalen Torus T mit Signaturtyp $(n,0)$ und spaltende Untergruppen H_α mit Signaturtyp $(2,1)$, wovon ein positiver Eigenvektor 1 im Torus liegt. Daher erhalten wir für die Signatur der Killingform der spaltenden Form den Rang n der Gruppe.

ii) Falls die getwisteten Formen zu zwei Kozykeln t und s verschiedene Signaturen der Killingform haben, so können die Formen nicht isomorph sein und folglich die beiden Kozykel t und s nicht äquivalent in $H^1(\Gamma, \operatorname{Aut} G)$ sein. Mit dieser Methode kann man die Injektivität der Abbildung $T_2/W \to H^1(\Gamma, G)$ für die adjungierten Gruppen (außer solche vom Typ D_n) beweisen. Leider erhält man so nur Aussagen über die adjungierten Gruppen.

Wir wollen nun die Konjugation der anisotropen maximalen Tori beweisen, beginnen werden wir mit einem Resultat, das über beliebigem Grundkörper gültig ist und dessen Beweis ähnlich dem Beweis des Theorems über die Konjugation der maximalen spaltenden Tori in Borel-Tits [2] ist:

Satz 14. *Sei G algebraische Gruppe über k und S, S' spaltende Tori, die nach Übergang zu einer endlichen Körpererweiterung $K|k$ konjugiert sind. Dann sind S und S' schon über k konjugiert.*

Beweis. Sei $S' = gSg^{-1}$ für $g \in G(K)$. Wir konstruieren wie bei Borel-Tits [2], 3.8 k-parabolische Untergruppen P und P' von G zu S und S': Wir

wählen dazu zunächst einen maximalen k-Torus $T \supseteq S$ und eine Ordnung der Wurzeln von S. Nun setzen wir $P = \langle T, U_\beta \mid \beta|_S \geq 0 \rangle$, als unipotentes Radikal erhalten wir $R_u = \langle U_\beta \mid \beta|_S > 0 \rangle$ und als Levifaktor $L = C_G(S) = \langle T, U_\beta \mid \beta|_S = 0 \rangle$. Bei der Konstruktion von P' wählen wir die Ordnung der Wurzeln von S' so, daß $\operatorname{Int} g$ positive Wurzeln von S in positive Wurzeln von S' überführt, und setzen $T' = gTg^{-1}$. Dabei identifiziert sich die Wurzel β von T mit der Wurzel $\beta' := \beta \circ \operatorname{Int} g^{-1}$ von T', es ist dann $gU_\beta g^{-1} = U_{\beta'}$, und wir erhalten $P' = gPg^{-1}$, $R_u' = gR_u g^{-1}$ und $L' = gLg^{-1}$.
Da P und P' über K konjugiert sind, sind sie nach BOREL-TITS [2] 4.13 auch über k konjugiert, wir können also annehmen, daß $P' = P$ ist und g in $N_G(P) = P$ liegt.
Nach BOREL-TITS [2], Théorème 4.15 ist $C_G(S)$ eine k-Leviuntergruppe von P; ebenso ist $C_G(S') = gC_G(S)g^{-1}$ eine k-Leviuntergruppe von $gPg^{-1} = P$. Dann sind sie aber nach BOREL-TITS [2] 3.14 durch ein eindeutig bestimmtes Element v aus $R_u(k)$ zueinander konjugiert. Wenn wir nun g in $l \cdot u$ mit $l \in C_G(S)$, $u \in R_u$ zerlegen und beachten, daß l den Zentralisator $C_G(S)$ festläßt, so folgt aus der Eindeutigkeit von v, daß schon $u = v \in R_u(k)$ ist. Da l in $C_G(S)$ liegt, gilt dann $uSu^{-1} = S'$, was zu zeigen war.

Beispiel: Gruppen vom Typ G_2, B_2

Wir wollen T_2/W für adjungierte Gruppen vom Typ G_2 und B_2 berechnen. Dazu betrachte für eine Wahl einfacher Wurzeln den Isomorphismus

$$T \to (\mathbb{C}^*)^n\,,\ t \mapsto (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))\,.$$

Man sieht nun leicht, daß die Spiegelung an α_i durch

$$s_{\alpha_i}(t_1, \ldots, t_n) = \Big(\frac{t_1}{t_i^{C_{1i}}}, \ldots, \frac{t_n}{t_i^{C_{ni}}}\Big)$$

auf $(\mathbb{C}^*)^n$ operiert, wobei C_{ij} die Einträge der Cartanmatrix sind.

Im Falle der G_2 werden dabei die Elemente $(1,-1)$, $(-1,-1)$ und $(-1,1)$ aus T_2 äquivalent und wir erhalten zwei Formen der G_2, eine repräsentiert durch $(1,1)$ (die anisotrope Form mit -14 als Signatur der Killingform) und die andere repräsentiert durch $(-1,-1)$ (die spaltende Form mit 2 als Signatur der Killingform).

Im Falle der B_2 werden die Kozykel $(-1,1)$ und $(-1,-1)$ durch s_{α_1} isomorph; für die Signatur der Killingform erhalten wir bei der anisotropen Form -10, bei der mit $(-1,1)$ getwisteten Form 2 (die spaltende Form) und für die mit $(1,-1)$ getwistete Form -2. Also sind die drei Kozykel nicht äquivalent in $H^1(\Gamma, G)$, die Abbildung $T_2/W \to H^1(\Gamma, G)$ ist injektiv.

Satz 15. *Sei G einfache Gruppe, deren Wurzelsystem Wurzeln verschiedener Länge besitzt, und T anisotroper maximaler Torus von G. Dann ist G genau dann anisotrop, wenn alle Untergruppen H_α zu kurzen Wurzeln α von T anisotrop sind.*

Beweis. Offenbar genügt es, folgende äquivalente Aussage zu beweisen:

(*) Wenn es ein spaltendes H_α zu einer langen Wurzel α gibt, so auch zu einer kurzen Wurzel β.

Sei nun eine lange Wurzel α gegeben mit spaltendem H_α. Wähle eine kurze Wurzel β, so daß U_α, $U_{-\alpha}$ und U_β, $U_{-\beta}$ eine Untergruppe H von G erzeugen, deren Wurzelsystem vom Typ B_2 oder G_2 ist. Wenn wir nun in H eine Untergruppe H_γ zu einer kurzen Wurzel γ von $T \cap H$ finden, die spaltet, so ist H_γ auch eine spaltende Untergruppe zu einer kurzen Wurzel unseres Torus T, denn es ist $T = (T \cap H) \cdot (\ker \alpha \cap \ker \beta)$, d.h. γ ist Wurzel von T. Wir können also annehmen, daß G vom Typ B_2 oder G_2 ist, und weil (*) invariant unter zentralen Isogenien ist, können wir weiter annehmen, daß G adjungiert ist.
Nun entsteht G aus einer anisotropen Gruppe G' vom Typ B_2 oder G_2 durch einen Twist mit einem Element $t \in T'_2$ für einen anisotropen maximalen Torus T' von G'. Da wir für Wurzelsysteme vom Typ B_2, G_2 bereits gezeigt haben, daß $T_2/W \simeq H^1(\Gamma, G)$ ist, wissen wir, daß T und T' in G über $\mathbb{R}$ konjugiert sind und können $T = T'$ annehmen.
Aber H_γ spaltet genau dann, wenn $\gamma(t) = -1$ ist, und man überzeugt sich leicht davon, daß bei den Typen B_2, G_2 für einen nichttrivialen Kozykel $t \in T_2$ für eine kurze Wurzel γ von T immer $\gamma(t) = -1$ ist.

Theorem II. *Sei G halbeinfache Gruppe und T, T' zwei anisotrope maximale Tori. Dann sind T und T' schon über $\mathbb{R}$ konjugiert.*

Beweis. Wir können uns wie immer auf den Fall einer einfach zusammenhängenden Gruppe beschränken und annehmen, daß G einfach ist, da einfach zusammenhängende halbeinfache Gruppen direktes Produkt von einfach zusammenhängenden absolut einfachen Gruppen sind. Wir beweisen die Aussage nun durch Induktion über den Rang von G:
Falls G anisotrope Form ist, so haben wir das Resultat als Korollar 10 bewiesen. Ansonsten gibt es zu T und T' Wurzeln α bzw. α', so daß H_α und $H_{\alpha'}$ spaltend sind. Nach der soeben bewiesenen Aussage (*) in Satz 7 können wir annehmen, daß α und α' beide kurz sind. Wir betrachten nun die Tori $T_0 = S_\alpha \cdot \ker \alpha$ und $T'_0 = S_{\alpha'} \cdot \ker \alpha'$ für spaltende Tori S_α, $S_{\alpha'}$ in H_α bzw. in $H_{\alpha'}$. Diese können wir über $\mathbb{C}$ konjugieren und nach einer Operation der Weylgruppe annehmen, daß α dabei mit α' identifiziert wird, also H_α in $H_{\alpha'}$ konjugiert wird. Nach einer Konjugation innerhalb H_α (beachte, daß $\ker \alpha$ dabei festgelassen wird) können wir weiterhin annehmen, daß $S_{\alpha'} = gS_\alpha g^{-1}$ für ein $g \in G(\mathbb{C})$ ist. Da dann nach Satz 14 S_α und $S_{\alpha'}$ schon über $G(\mathbb{R})$ konjugiert sind, können wir T' mit diesem Element konjugieren und annehmen, daß $S_\alpha = S_{\alpha'}$ ist.
Wir betrachten nun den Zentralisator $C_G(S_\alpha)$, worin T_0 und T'_0 maximale Tori sind. Wenn $C_G(S_\alpha)$ keinen halbeinfachen Anteil hat, so gilt $C_G(S_\alpha) = T_0 = T'_0$; sonst sind $T_1 := T_0 \cap DC_G(S_\alpha)$ und $T'_1 := T'_0 \cap DC_G(S_\alpha)$ anisotrope maximale Tori von $DC_G(S_\alpha)$, die nach Induktionsvoraussetzung über $\mathbb{R}$ konjugiert sind,

d.h. wir können in jedem Fall annehmen, daß ein Teiltorus T_1 von T und ein Teiltorus T_1' von T' übereinstimmen.
Dann sind aber T und T' anisotrope maximaler Tori in $C_G(T_1)$, es ist $T = (T \cap DC_G(T_1)) \cdot ZC_G(T_1)$ und $T' = (T' \cap DC_G(T_1)) \cdot ZC_G(T_1)$. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann $T \cap DC_G(T_1)$ und $T' \cap DC_G(T_1)$ in $C_G(T_1)$ über $\mathbb{R}$ konjugiert und damit auch T und T' über $\mathbb{R}$ konjugiert.

Wir hatten bereits gesehen, daß dies äquivalent ist zum

Theorem III. *Sei G anisotrope Gruppe. Dann ist*

$$T_2/W \simeq H^1(\Gamma, G).$$

Literatur

[1] A. Borel, Linear Algebraic Groups, Benjamin 1969.

[2] A. Borel und J. Tits, Groupes Réductifs, Publications Mathématiques I.H.E.S. **27** (1965), 55–151.

[3] C. Chevalley, Classification des Groupes de Lie algébriques, Séminaire C. Chevalley 1956–1958.

[4] T. Geisser, Galoiskohomologie reeller halbeinfacher algebraischer Gruppen, Diplomarbeit 1990.

[5] G. Harder, Über einen Satz von E. Cartan, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **28** (1965), 208–214.

[6] J. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Graduate Texts in Mathematics **9**, Springer 1972.

[7] J. Humphreys, Linear Algebraic Groups, Graduate Texts in Mathematics **21**, Springer 1975.

[8] J.P. Serre, Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes in Mathematics **5**, Springer 1973.

[9] J.P. Serre, Local Fields, Graduate Texts in Mathematics **67**, Springer 1979.

[10] J. Tits, Classification of Algebraic Semisimple Groups, Proc. Symp. Pure Math., Vol. **9**, AMS 1966.

Eingegangen am: 12.03.1991

Adresse des Autors: Thomas Geisser, Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstr. 62, W–4400 Münster, Deutschland.