論　説

モチビック・コホモロジー，その応用と重要な予想

Thomas Geisser

数論の主定理の一つは類数公式である．K を代数体 (つまり有理数体の有限拡大体) とし，Riemann ζ 関数と同様に，Dedekind ζ 関数を

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}$$

で定義する．ここで $\mathfrak{a}$ は K の整数環 $\mathcal{O}_K$ のゼロでないイデアルを走り，$N\mathfrak{a} = \#\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}$ はイデアル $\mathfrak{a}$ のノルムである．$\zeta_K(s)$ は複素平面全体に解析接続され，有理型関数となり，s が 0 に近づくとき，

$$\zeta_K(s) \sim -s^{r_1+r_2-1}\frac{h_K R_K}{w_K}$$

が成り立つ．ここで，h_K は K の類数，w_K は K 内の 1 のべき根 $\mu(K)$ からなる群の位数，r_1 は K の実数体への埋め込み $\sigma_i : K \to \mathbb{R}$ の個数，r_2 は実数体に入らない複素体への埋め込み $\tau_j : K \to \mathbb{C}$ の共役類の個数である．また，写像 reg_K を次のように定義する：

$$\begin{aligned} reg_K : \mathcal{O}_K^\times/\mu(K) &\to \mathbb{R}^{r_1+r_2-1}, \\ u &\mapsto \big(\log(\sigma_1(u)), \ldots, \log(\sigma_{r_1}(u)), 2\log(\tau_1(u)), \ldots, 2\log(\tau_{r_2-1}(u))\big). \end{aligned}$$

reg_K の像は格子であり，K の単数基準 R_K はその像の余体積である．

70 年代に，s が負の整数に近づくときの $\zeta_K(s)$ の振る舞いは同様に Borel レギュレーターで表されることが明らかになった．$n \geq 2$ を整数とし，n が奇数のとき，$d_n = r_1 + r_2$ とし，n が偶数のとき $d_n = r_2$ とする．Borel [11] は代数的 K 群からレギュレーター写像 $reg_{K,n} : K_{2n-1}(\mathcal{O}_K) \to \mathbb{R}^{d_n}$ を定義し，この核は $K_{2n-1}(\mathcal{O}_K)$ のねじれ部分群であり，像は格子であることを示した．この格子の余体積 $R_n(K)$ は Borel レギュレーターと呼ばれる．Borel はさらに s が $1-n$ に近づけば，$\zeta_K(s)/(s-(1-n))^{d_n}R_n(K)$ が有理数であることを示した．もっと精密に，Lichtenbaum は s が $1-n$ に近づくとき，2 のべきを除けば

$$\zeta_K(s) \sim \pm(s-(1-n))^{d_n}\frac{\#K_{2n-2}(\mathcal{O}_K)}{\#K_{2n-1}(\mathcal{O}_K)_{tor}}R_n(K)$$

を予想した．80 年代にこの予想は (有理数倍を除いて) Beilinson によって多様体に一般化された．しかしながら，上記の Lichtenbaum の予想が 2 のべきのずれを含んだ主張であったり，また，Beilinson の予想が有理数のずれを含む主張であることから分かるように，ζ 関数のより詳細な性質を記述することにおいては，K 群という不変量では不十分であることが明らかになった．そこで，モチビック・

コホモロジーというより細かい不変量の存在が最初に Beilinson と Lichtenbaum によって予想された．Beilinson はレギュレーターを混合モチーフの拡大群から混合 Hodge 構造の拡大群への実現写像に書き直し，混合モチーフの性質に関する予想から拡大群の性質を予想した ([4])．一方，有限体上の Hasse–Weil ζ 関数 $\zeta(X,s)$ の特殊値が $s=0$ の場合に定数層 $K_0 \cong \mathbb{Z}$ のエタール・コホモロジーで表され，$s=1$ の場合に乗法群 $K_1 \cong \mathbb{G}_m$ のエタール・コホモロジーで表されるが，Lichtenbaum は一般の整数 n に対する $s=n$ の場合には，一つの層 K_n ではなくて，エタール層の複体が必要であることを理解し，そのようなモチビック複体と呼ばれる複体が満たすべき性質とその存在を予想として述べた ([51])．モチビック複体のコホモロジーはモチビック・コホモロジーと呼ばれるが，それは位相による．上記の予想の一つは，ある次数のモチビック複体の Zariski コホモロジーとそのエタール・コホモロジーとが同型であることを主張する Beilinson–Lichtenbaum 予想である．それは，近年 Voevodsky と Rost によって証明された．

モチビック複体 $\mathbb{Z}(n)$ の候補は 1986 年に Bloch，1990 年に Voevodsky によって定義された．多くの整数論と数論幾何の不変量はモチビック・コホモロジーで表される．例えば，Dedekind 環のイデアル類群と単数群がモチビック・コホモロジー群の例であり，二次形式の理論で重要な体の Milnor K 群もモチビック・コホモロジー群としての解釈を持つ．一般に使われているエタール・ツイスト層 $\mu_m^{\otimes n}$ は $\mathbb{Z}/m(n)$ と擬同型であり，標数が p のとき logarithmic de Rham–Witt 層 $W_r\Omega^n_{X,\log}$ は $\mathbb{Z}/p^r(n)$ のシフトと擬同型である．モチビック・コホモロジーと K 理論との関係はスペクトル系列で表せ，そのスペクトル系列が有理数係数の場合退化するため，以前から使われていた K 群の Adams 作用素による固有空間は有理数係数でモチビック・コホモロジーと同型となる．

本稿では，モチビック・コホモロジーの定義と基本的な性質を紹介してから，現時点で残っている重要な未解決の予想を述べる．最後に筆者が詳しい応用，特に Lichtenbaum のモチベーションになった有限体上の ζ 関数の特殊値の公式を与える．代数的 K 理論とレギュレーター，及び混合モチーフ圏に関する見事な論説はそれぞれ [42]，[81] に掲載されているので，その話は省略する．筆者の視野の狭さのため，話すべきの多くの研究に触れられず，筆者の専門に重点をおいた解説になってしまったことをお詫びする．

1　高次 Chow 群，モチビック・コホモロジーと Suslin ホモロジー

本稿では，基礎スキーム S は体または Dedekind 環 R のスペクトルであり，多様体は S 上分離的で有限型なスキームを意味する．

1.1　高次 Chow 群とモチビック・コホモロジー

多様体 X に対して, 位相幾何学の特異ホモロジーとコホモロジーの類似を探す．最初の候補は Bloch によって 1986 年ごろに定義された高次 Chow 群である ([7])．まずこの定義と基礎的な性質を述べる．代数幾何における標準的な単体 Δ^n を次のように定義する：$\Delta^n = \operatorname{Spec} R[t_0,\dots,t_n]/(\sum t_i - 1)$．多様体として Δ^n は n 次元アフィン空間と同型であるが，標準的な境界写像 $\delta_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$, $(x_0,\dots,x_{n-1}) \mapsto (x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{n-1})$ が存在する．境界写像の合成によって $m<n$ に対して定まる様々な閉埋め込み $\Delta^m \to \Delta^n$ を Δ^n の面と呼ぶ．$z_n(X,i)$ を $X \times \Delta^i$ の $i+n$ 次元の整閉部分多様体のうち，すべての面 $X \times \Delta^m$ と正しく交わるもの全体で生成される自由アーベル群とする．V と W が正しく交わるとは，$V \cap W$ の任意の既約成分 T の次元が正しいこと，つまり，余次

元 $\operatorname{codim} T = \operatorname{codim} V + \operatorname{codim} W$ が成り立つことである．各 δ_i に対してサイクルの引き戻し写像 $\delta_i^* : z_n(X, j) \to z_n(X, j-1)$ が定義され，引き戻し写像の交代和を $d_j = \sum(-1)^i \delta_i^* : z_n(X, j) \to z_n(X, j-1)$ で表すと $d_{j-1} d_j = 0$ なので

$$\cdots \xrightarrow{d_{j+1}} z_n(X, j) \xrightarrow{d_j} z_n(X, j-1) \xrightarrow{d_{j-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} z_n(X, 1) \xrightarrow{d_1} z_n(X, 0) \to 0$$

は自由アーベル群の複体となる．高次 Chow 群 $CH_n(X, i)$ とアーベル群 A に対する $CH_n(X, i, A)$ とは，それぞれ複体 $z_n(X, *)$ と複体 $z_n(X, *) \otimes A$ の i 次のホモロジーである．$CH_n(X, i, \mathbb{Q})$ を $CH_n(X, i)_{\mathbb{Q}}$ とも書き，X の任意の既約成分の次元が d のとき，$z_{d-n}(X, *)$ をしばしば $z^n(X, *)$ と表し，$CH_{d-n}(X, i)$ をしばしば $CH^n(X, i)$ と表す．$X = \operatorname{Spec} R$ の場合，$CH_n(\operatorname{Spec} R, i, A)$ を $CH_n(R, i, A)$ と略する．定義から，短完全系列

$$0 \to CH_n(X, i)/m \to CH_n(X, i, \mathbb{Z}/m) \to {}_m CH_n(X, i-1) \to 0$$

を得る．ただし，${}_m A$ は m 倍写像の核 $\ker A \xrightarrow{\times m} A$ を表す．$i = 0$ のとき，高次 Chow 群 $CH_n(X, 0)$ は一般の Chow 群 $CH_n(X)$ と自然に同型である．サイクルの次元の計算で，任意の $j < -n$ 及び $n > \dim X$ に対して，$CH_n(X, j) = 0$ が分かる．さらに，X を次元 d の既約多様体とすると，$z_d(X, j) = \mathbb{Z}$ で，$d_{2j} = \mathrm{id}$, $d_{2j+1} = 0$ なので，$CH_d(X, 0) = \mathbb{Z}$ であり，$j > 0$ に対して $CH_d(X, j)$ は消える．

1.2　基本的な性質

射 $f : X \to Y$ が固有のとき，$f_* : z_n(X, j) \to z_n(Y, j)$ を

$$V \mapsto \begin{cases} [k(V) : k(f(V))] \cdot f(V) & \dim V = \dim f(V); \\ 0 & \dim V > \dim f(V) \end{cases} \tag{1}$$

で定義すれば，$d_j f_* = f_* d_j$ なので，$f_* : CH_n(X, j) \to CH_n(Y, j)$ が導かれる ([20, Appendix])．特に，k を体として，構造射 $f : X \to \operatorname{Spec} k$ が固有なとき，次数写像 $deg = f_* : CH_0(X, 0) \to CH_0(k, 0) \cong \mathbb{Z}$ が存在する．$f : X \to Y$ が平坦で相対次元が d のとき，$f^* : z_n(Y, j) \to z_{n+d}(X, j)$ を V が $f^{-1}(V)$ に付随するサイクルへ移る写像と定義すれば，$d_j f^* = f^* d_j$ なので，$f^* : CH_n(Y, j) \to CH_{n+d}(X, j)$ が導かれる．特に，エタール射 $j : U \to X$ に対する引き戻し写像 $j^* : z_n(X, *) \to z_n(U, *)$ により $z_n(-, *)$ はエタール前層 (つまり反変関手) の複体であり，実際，$z_n(-, *)$ はエタール層の複体，特に Zariski 層の複体である．moving lemma を用いて，より一般に，$CH^n(-, i)$ は体上のスムーズな多様体の圏からアーベル群の圏への反変関手であることが分かる (moving lemma とは，サイクルに複体の境界を足すと，与えられたサイクルはより良い性質を持つようになるという定理である)．

定理 1 (局所化完全列，Bloch [9], Levine [48])　X が体又は離散付値環上の多様体，$i : Z \to X$ は閉埋め込みで，$j : U = X - Z \to X$ は Z の開補集合とすると，次の完全列を得る：

$$\cdots \to CH_n(Z, j) \xrightarrow{i_*} CH_n(X, j) \xrightarrow{j^*} CH_n(U, j) \to CH_n(Z, j-1) \to \cdots . \tag{2}$$

証明は複体の完全系列

$$0 \to z_n(Z, *) \xrightarrow{i_*} z_n(X, *) \xrightarrow{j^*} z_n(U, *) \to C_* \to 0$$

が存在し，C_* が完全であることを示せばよい．C_* の完全性は moving lemma という深い定理である．定理 1 から次のことが従う．

系 2 X が体または離散付値環上の多様体のとき，高次 Chow 群は複体 $z_n(-,*)$ の Zariski 超コホモロジーと同型である：

$$CH_n(X,j) \xrightarrow{\sim} H^{-j}(X_{\mathrm{Zar}}, z_n(-,*)).$$

ただし，層の複体 $C^\cdot$ の超コホモロジーとは，$C^\cdot$ の入射的分解 $I^\cdot$ の大域切断のホモロジーである．特に，スペクトル系列

$$E^2_{s,t} = H^{-s}_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{H}_t(z_n(-,*))) \Rightarrow CH_n(X, s+t)$$

を得る．

一般の Dedekind 環の高次 Zariski コホモロジーは必ずしも消えないので，定理と系の主張は成り立たない．そこで，より良い性質を持たせるために Dedekind 環上の多様体 X に対しては $CH_n(X,j) := H^{-j}(X_{\mathrm{Zar}}, z_n(-,*))$ と定義し直す．こうすることによって (2) の完全列が成り立つ．

系 3 上の条件の下で，局所化スペクトル系列が存在する：

$$E^1_{s,t} = \bigoplus_{x \in X_{(s)}} CH_{n-s}(k(x), s+t) \Rightarrow CH_n(X, s+t). \tag{3}$$

ただし $X_{(s)}$ は x の閉包の次元が s となるような X の点 x 全体からなる集合であり，$k(x)$ は点 x における剰余体で，$CH_m(k(x),j) = \mathrm{colim}_{x\in U}\, CH_m(U,j)$ である (U は X の x を含む開部分集合を走る)．

この系はある種の局所大域原理であり，これによって X の高次 Chow 群の研究は，ある程度，X が体のスペクトルの場合に帰着される．X が体 k のスペクトルのとき $z_{-n}(k,n)$ は次元が 0 のサイクル，つまり閉点で生成されるので，通常より扱いが簡単である：

定義 4 ([58]) Milnor K 群 $K^M_*(k)$ とは，k の乗法群 $k^\times$ のテンソル代数 $T_*k^\times$ を Steinberg 関係式 $a \otimes (1-a)$ で生成されるイデアルで割った商環である：

$$K^M_*(k) = T_*k^\times / \langle a \otimes (1-a) | a \in k - \{0,1\}\rangle.$$

特に定義から $K^M_0(k) = \mathbb{Z}$, $K_1(k) = k^\times$ を得る．$u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ の同値類を $\{u_1, \ldots, u_n\}$ とも書く．

Milnor らの研究によって Milnor K 群と二次形式は深い関係を持つことが分かっている (Milnor 予想 [58]，Orlov–Vishik–Voevodsky 定理 [63])．

定理 5 (Totaro [85], Nesterenko–Suslin [62]) 写像

$$k^\times \otimes \cdots \otimes k^\times \to \Delta^n_k, \tag{4}$$

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mapsto \left(\frac{-u_1}{1-\sum u_i}, \ldots, \frac{-u_n}{1-\sum u_i}, \frac{1}{1-\sum u_i}\right) \tag{5}$$

は同型 $K^M_n(k) \cong CH_{-n}(k,n)$ を誘導する．

高次 Chow 群と Quillen の高次 K 群の関係については，次のことが明らかになった．$K'_i(X) =$

$G_i(X)$ をスキーム X の連接層の圏から定義した K 群とする．X がネーターかつ正則の場合，$K_i'(X)$ は通常の有限生成な局所自由層の圏から定まる K 群と同型である．

定理 6 ([49], [77], [14])　X が体上または Dedekind 環上の多様体のとき，スペクトル系列

$$E^2_{s,t} = CH_{-t}(X, s+t) \Rightarrow K'_{s+t}(X)$$

が存在する．

このスペクトル系列の微分写像は (具体的に計算できる) 定数倍によって消える．特に有理数体とテンソルすると，スペクトル系列が E^2-退化する．X が体 k のスペクトルのときは，2 のべき以外の有限係数の場合もスペクトル系列が E^2-退化する [41, Thm.3.1, p.104 (8)] が，自然な写像 $K_3^M(\mathbb{R})/2 \to K_3(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$ の下で $\{-1,-1,-1\}$ が消えるので，

$$d^2 : H^0_{\text{ét}}(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2) \cong CH_{-2}(\mathbb{R}, 4, \mathbb{Z}/2) \to CH_{-3}(\mathbb{R}, 3, \mathbb{Z}/2) \cong K_3^M(\mathbb{R})/2 \cong \langle\{-1,-1,-1\}\rangle$$

は群 $\mathbb{Z}/2$ の同型である．

1990 年代，Voevodsky [80] は X が完全体上のスムーズなスキームの場合に，エタール層からなるモチビック複体 $\mathbb{Z}(n)$ を定義し，アーベル群 A に対して $H^i_{\mathcal{M}}(X, A(n))$ を $\mathbb{Z}(n)\otimes A$ の Zariski 超コホモロジーで定義した．特異点の解消の下では X がスムーズでない場合にもモチビック・コホモロジーを一般化できる．モチビック・コホモロジーは反変関手である．X がスムーズなとき，擬同型 $\mathbb{Z}(n) \cong z^n(-, 2n-*)$ が存在して，特に

$$CH^n(X, i) \cong H^{2n-i}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(n))$$

が成り立つ ([86])．このため，X がスムーズな場合にのみ興味がある場合はしばしば高次 Chow 群とモチビック・コホモロジーを同一視する．実は，高次 Chow 群は Borel–Moore ホモロジーの性質を持ち，Voevodsky のモチビック・コホモロジーはコホモロジーの性質を持つので，それらが一致することは Poincaré 双対性の類似と見なせる．

X が k 上スムーズで，k の標数が m を割らないとき，エタール・コホモロジーのホモトピー不変性からサイクル写像

$$CH^n(X, 2n-i, \mathbb{Z}/m) \to H^i_{\text{ét}}(X, \mu_m^{\otimes n})$$

を得る ([8])．この写像はエタール層の擬同型を導く：

定理 7 (Geisser–Levine [29], [30], Suslin–Voevodsky [80])　X が標数 $p \geq 0$ の体上スムーズなとき，

$$\mathbb{Z}/m(n) \cong \mu_m^{\otimes n} \qquad p \nmid m \text{ のとき;}$$
$$\mathbb{Z}/p(n) \cong \nu^n[-n].$$

ここで $\mathbb{Z}/m(n)$ は $\mathbb{Z}(n)\otimes\mathbb{Z}/m$ であり，ν^n は $dx_1/x_1 \wedge \cdots \wedge dx_n/x_n$，$x_i \in \mathcal{O}_X^\times$ で生成される Ω_X^n のエタール部分層である．

k の標数が m を割らないとき，Kummer 理論によって Milnor K 群から Galois コホモロジーへの同型 $\rho : K_1^M(k)/m = k^\times/(k^\times)^m \cong H^1(\mathrm{Gal}(k), \mu_m)$ を得る．ただし $\mathrm{Gal}(k)$ は体 k の絶対 Galois 群

を表す．カップ積の下で Galois コホモロジー $\oplus_n H^n(\mathrm{Gal}(k), \mu_m^{\otimes n})$ は次数付き可換環であり，Steinberg 関係式を満たすので，自然な写像

$$r_n^m : K_n^M(k)/m \to H^n(\mathrm{Gal}(k), \mu_m^{\otimes n}), \qquad \{a_1, \ldots, a_n\} \mapsto \rho(a_1) \cup \cdots \cup \rho(a_n)$$

を得る．近年，次の非常に難しい定理が証明された：

定理 8 (Bloch–加藤予想 [10]，Rost–Voevodsky の定理 [78], [87]) 体 k の標数が m を割らないとき，自然な写像 r_n^m は同型である．

$m=2$ の場合，この定理は二次形式に関する Milnor 予想とも関係がある．写像 r_n^m は定理 5 と 7 の同型と両立するので，$H^n_{\mathcal{M}}(k, \mathbb{Z}/m(n)) \to H^n_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}/m(n)) = H^n(\mathrm{Gal}(k), \mu_m^{\otimes n})$ が同型でモチビック・コホモロジーがモチビック複体のエタール超コホモロジーと同型であることが言える．Rost–Voevodsky 定理の p 進類似も成り立つ：

定理 9 (Gabber–Bloch–加藤 [10]) k の標数が p のとき，自然な写像

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \mapsto \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n} \subseteq \Omega_k^n$$

は同型

$$r_n^p : K_n^M(k)/p \xrightarrow{\sim} \nu^n(k)$$

を誘導する．

Rost–Voevodsky と Gabber–Bloch–加藤の定理から，Beilinson–Lichtenbaum 予想 [4, 5.10 D] [51] が従う：

定理 10 X を体 k 上スムーズとする．任意の $i \le n+1$ に対して自然な写像

$$H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(n)) \to H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n))$$

は同型である．

この定理を証明するためには，有理数係数と有限係数の場合を示せばよい．有理数係数の場合これは高次 Galois コホモロジーがねじれ群であることから従う．k の標数 p が m を割らない $\mathbb{Z}/m$ 係数の場合，これは Suslin–Voevodsky [80] と Geisser–Levine [30] によって Rost–Voevodsky 定理から従う．最後に，$\mathbb{Z}/p$ 係数の場合これは Geisser–Levine [29] によって Gabber–Bloch–加藤の定理から従う．

体 k に対して，$H^{n+1}_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n))$ が消えるという事実は Hilbert の定理 90 (現代の言葉で $H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{G}_m) = 0$) の類似である．$H^3_{\mathcal{M}}(k, \mathbb{Z}(1)) = 0$ であるが，$H^3_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(1)) \cong \mathrm{Br}(k)$ は k の Brauer 群であるから $i > n+1$ の場合，定理の主張は成り立たない．Dedekind 環上スムーズなスキームに対する類似は [17] で証明された．

1.3 Suslin ホモロジー

ここで，位相幾何学における特異ホモロジーの類似物として Suslin ホモロジーを導入する．これはある応用においては高次 Chow 群よりよい性質を持つ．体上の多様体 X に対して，$C_i(X)$ を $X \times \Delta^i$ の整閉部分スキーム Z で，$Z \to X \times \Delta^i \stackrel{p_2}{\to} \Delta^i$ が有限全射であるもの全体で生成される自由アーベル群とする．面 Δ^{i-1} との交差の交代和が写像 $C_i(X) \to C_{i-1}(X)$ を導いて，複体 $C_*(X)$ を得

る．アーベル群 A に対して，A 係数 Suslin ホモロジー群 $H_i^S(X,A)$ とは複体 $C_*(X)\otimes A$ の i 次のホモロジーである．特に $H_0^S(X,\mathbb{Z})$ は閉点 $x\in X$ で生成される自由アーベル群を Δ^1 上全射な整曲線 $Z\subseteq X\times\Delta^1$ の因子 $Z\cap(X\times\{0\})-Z\cap(X\times\{1\})$ で生成される部分群で割った商群である．固有なスキーム X に対して，自然な射

$$H_i^S(X,A)\to CH_0(X,i,A)$$

は $i=0$ または特異点の解消の下で同型である ([76])．

射 $f:X\to Y$ に対して，Δ^i 上有限な部分スキーム $Z\subseteq X\times\Delta^i$ の像 $f(Z)\subseteq Y\times\Delta^i$ もまた Δ^i 上有限なので，(1) によって Suslin ホモロジーは共変関手になる．同様に，f が有限かつ平坦のとき，Δ^i 上有限な $Z\subseteq Y\times\Delta^i$ の逆像 $f^{-1}(Z)$ の任意の既約成分もまた Δ^i 上有限なので，引き戻し写像 $f^*:H_i^S(Y,A)\to H_i^S(X,A)$ が存在する．Suslin ホモロジーは局所化系列を持たないが，次のようなやや弱い性質を持つ．カルテシアン図式

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & X' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

で，p が固有射で，i が閉埋め込み，p が同型 $X'-Z'\to X-Z$ を誘導するとき，特異点の解消の下で長完全列

$$\cdots\to H_i^S(Z',A)\to H_i^S(X',A)\oplus H_i^S(Z,A)\to H_i^S(X,A)\to H_{i-1}^S(Z',A)\to\cdots$$

が存在する．p が有限のとき，特異点の解消は必要ではない．例えば，X' は X の特異点の解消で，Z はその上で $X'\to X$ が同型でない閉部分スキームとすると，次元に関する帰納法を使って，Suslin ホモロジーの性質をスムーズの場合から一般の場合へ拡張できる．任意のハイパーエンベロープ $X_\bullet\to X$ に対して降下定理も成り立つ ([27])，つまり X の固有な被覆の情報から，X の情報が記述できる．

Schmidt は Dedekind 環上の多様体の Suslin ホモロジーの定義を提案したが，その証明された性質はまだ不十分である ([68])．より一般に，重さ n のモチビック・ホモロジー群 $H_i^{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(n))$ が存在し，Suslin ホモロジーは $H_i^{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(0))$ と同型である．モチビック・ホモロジーは Suslin ホモロジーと同じ性質を持つ．

1.4　4 つのモチビック不変量

完全体上で次の 4 つのモチビック不変量が存在する ([15])：

$$\begin{array}{ccc} H_c^i(X,A(n)) & \xrightarrow{\text{固有}} & H^i_{\mathcal{M}}(X,A(n)) \\ {\scriptstyle \text{スムーズ}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \text{スムーズ}}\big\downarrow \\ H_j^{\mathcal{M}}(X,A(m)) & \xrightarrow{\text{固有}} & H_j^c(X,A(m)). \end{array}$$

ここで $H_j^c(X,A(m))=CH_m(X,j-2m,A)$ であり，$H_c^i(X,A(n))$ は紹介していないコンパクト台モチビック・コホモロジーである．X が固有のとき水平方向の矢印は同型，X が連結かつ次元 d でスムーズで，$i+j=2d$ かつ $n+m=d$ のとき，特異点の解消の下で垂直な矢印は同型である．対角線上に位置する群は双対的な関係を持っており，後述する双対性が成り立つ．

2　モチビック・コホモロジーに対する予想

この章では，モチビック・コホモロジーに関する，重要な予想を紹介する．ほとんどの予想はモチビック・コホモロジーが定義される前から K 理論に対して予想されていたが，ここではモチビック・コホモロジーの言葉で自然な一般化を紹介する．

2.1　Gersten 予想

Gersten 予想は簡単に言うと，$X=\operatorname{Spec}R$ が正則な局所環のとき，スペクトル系列 (3) が E^2 で退化することである．つまり，

予想 11　R を体上または Dedekind 環上の正則な多様体の局所化とし，$X=\operatorname{Spec}R$ とおく．そのときスペクトル系列 (3) の E^1 行からなるアーベル群の複体

$$0\to CH_n(R,i)\to\bigoplus_{x\in X^{(0)}}CH_n(k(x),i)\to\bigoplus_{x\in X^{(1)}}CH_{n+1}(k(x),i-1)\to\cdots$$

は完全である．ここで $X^{(d)}$ は x の閉包の余次元が d となるような X の点 x 全体からなる集合である．

体上の場合，この予想は Quillen [64] の方針を使って Bloch によって証明された ([7])．X が Dedekind 環上スムーズな場合には，離散付値環に帰着できる ([17, Thm.1])．R が分数体 K を持つ離散付値環の場合には，主張は局所化完全列 (2) が分解すること，つまり $CH_n(R,i)\to CH_n(K,i)$ が単射であることと同値であり，これは有限係数のときには知られている ([17])．現時点で残っているケースは有理数係数，または Dedekind 環上スムーズでない正則のケースである．

2.2　Bass 予想

すでに $n\geq d:=\dim X$ に対する $CH_n(X,*)$ を計算した．$n=d-1$ の場合も計算できる：

定理 12 ([7], [50])　X が Dedekind 環または体上スムーズなとき，

$$CH_{d-1}(X,i)\cong\begin{cases}\operatorname{Pic}X & i=0;\\ \mathcal{O}_X(X)^\times & i=1;\\ 0 & i>1.\end{cases}$$

特に，Dirichlet の単数定理とイデアル類群の有限生成性の一般化 [66], [40] から，局所化完全列を用いて次の定理を得る：

定理 13　X が整数環 $\mathbb{Z}$ 上有限型のとき，任意の $n\geq\dim X-1$ と i に対して，$CH_n(X,i)$ は有限生成なアーベル群である．

これは任意の n に対して成り立つことが予想されている：

予想 14 (Bass [2])　任意の $\mathbb{Z}$ 上有限型な X と n,i に対して，$CH_n(X,i)$ は有限生成である．

この予想は非常に深い．同様に，有限体上の Suslin ホモロジーも有限生成であることが予想されている．

$n\leq 0$ のときのみにいくつかの結果がある．まず $CH_n(X,i)\cong CH_0(X\times\mathbb{A}^{-n},i)$ なので，$n=0$ を考察すればよい．X がスムーズで射影的である場合は Bloch–加藤–斎藤によって $CH_0(X)$ の有限生成性が証明された ([45])．その一般化として，関連のある加藤予想 [44] が証明された：X が有限体 $\mathbb{F}_{p^r}$ 上スムーズで固有の場合，$p\nmid m$ のとき有限係数の Chow 群 $CH_0(X,i,\mathbb{Z}/m)$ が有限生成であ

ることはJannsen–Kerz–斎藤によって証明された ([46])．特異点の解消の存在を仮定の下で，それは任意の X と任意の m に対して成り立つ ([38])．この結果を使って，後述するParshin予想の下で整数係数の群 $CH_0(X,i)$ の有限生成性も証明された ([23])．

2.3　Suslin予想，Beilinson–Soulé予想とParshin予想

Bass予想に続く，この分野の最も重要と思われる予想はBeilinson–Soulé予想と言える．

予想15 (Beilinson–Soulé [3], [74, Conj.2.9])　任意の体上の X に対して，$H^i_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(n)) \neq 0$ となるのは $n=i=0$ または $i>0$ のときに限る．

定理10によって，有限係数モチビック・コホモロジーは $i<n$ のときエタール・コホモロジーと同型なので，有限係数Beilinson–Soulé予想は知られている．特に，Beilinson–Soulé予想は "$n>0, i<1$ に対して $H^i_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(n))=0$" と同値である．高次Chow群の言葉に訳すと，$n>0, i\geq 2n$ のとき，$CH^n(X,i)_{\mathbb{Q}}$ が消えることが予想されている．有限体上の場合，さらに強いParshin予想がある：

予想16 (Parshin [3, Conj.2.4.2.3])　X が有限体上スムーズで射影的なとき，任意の $i\neq 2n$ に対して $H^i_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(n))=0$．

Parshin予想の根拠は以下である．一般にモチビック・コホモロジーは混合モチーフのなすアーベル圏における拡大群であると考えられている．一方，有限体上の混合モチーフの圏は半単純であると予想されており，従って高次の拡大群は消える．このことから $i<2n$ なら $H^i_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(n))=0$ であることが従う．局所化完全列と帰納法を使って，次の命題を証明できる：

命題17　Parshin予想の下で，

1) X が正標数の体上スムーズで，$i<n$ のとき $H^i_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(n))=0$ である．特に，正標数の任意の体 k に対して，自然な写像 $K^M_n(k)_{\mathbb{Q}}\to K_n(k)_{\mathbb{Q}}$ は同型である ([3, Conj.2.4.2.2])．

2) Dedekind環上スムーズなスキームの局所化に対して，Gersten予想が成り立つ．

最後の主張は次のようにして分かる：R を離散付値環，k をその剰余体，K をその商体，π を R の極大イデアルの生成元とする．Parshin予想の下で $i\neq n$ のとき $CH_{-n}(k,i)_{\mathbb{Q}}=0$ だが，Totaro–Nesterenko–Suslinの定理によって $CH_{-n}(k,n)_{\mathbb{Q}}\cong K^M_n(k)_{\mathbb{Q}}$ である．その生成元 $\{a_1,\ldots,a_n\}\in k^\times\otimes\cdots\otimes k^\times$ の持ち上げ $\bar{a}_i\in R^\times$ を選べば，$\{\pi,\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n\}\in CH_{-n-1}(K,n+1)_{\mathbb{Q}}$ が $\{a_1,\ldots,a_n\}$ へ移るので，局所化完全列が分裂する．予想11とその後の説明参照．

注意：基礎体の標数が0の場合や，有限係数モチビック・コホモロジーについては，予想16と命題17 (1) と同様の主張は成り立たない．例えば，$H^1_{\mathcal{M}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}(3))$ は階数1だから，命題17 (1) の前半は成り立たないし，$K^M_5(\mathbb{Q})$ はねじれ群だが，$K_5(\mathbb{Q})$ は階数1なので，後半の主張も成り立たない．もっと一般に，Borel [11] の計算によって，代数体 K が r_1 個の実素点と r_2 個の複素素点を持つとき，

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^i_{\mathcal{M}}(K,\mathbb{Q}(n)) = \begin{cases} 1 & i=n=0; \\ \infty & i=n=1; \\ r_2 & i=1, n>0\ \text{偶数}; \\ r_1+r_2 & i=1, n>1\ \text{奇数}; \\ 0 & \text{それ以外}. \end{cases} \tag{6}$$

命題 18 Bass 予想が成り立てば，任意の体上の X と $n>0, i\geq 2n$ に対して，$CH^n(X,i)$ が消える，つまり Chow 群に関する Beilinson–Soulé 予想の類似が成り立つ．

証明の概略だが，高次 Chow 群は順極限と可換なので，X を $\mathbb{Z}$ 上有限型であることを仮定してよい．局所化完全系列と次元に関する帰納法によって，X がスムーズであることも仮定してよい．k の標数が正のとき，定理 10，定理 7 と係数完全系列

$$\cdots \to CH^n(X,i) \to CH^n(X,i)_{\mathbb{Q}} \to CH^n(X,i,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to CH^n(X,i-1) \to \cdots$$

から，$CH^n(X,i)$ は $i\geq 2n$ のとき可除であることが従うが，可除でかつ有限生成な群は自明である．(ここで，$i=2n$ のとき X の有限生成性から $CH^n(X,2n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H^0_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n))$ は有限群であることを利用した.）k の標数が 0 のとき，局所完全系列の順極限

$$\to \oplus_p CH^{n-1}(X\times_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p,i) \to CH^n(X,i) \to CH^n(X\times_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q},i) \to \oplus_p CH^{n-1}(X\times_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p,i-1) \to$$

と正標数の場合から $i\geq 2n$ のとき $CH^n(X,i)\cong CH^n(X\times_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q},i)$ であるが，左辺が有限型で，右辺が (上記と同様に) 可除なので，この群も消える． □

体の場合，次の予想は Beilinson–Soulé 予想と Parshin 予想を含む：

予想 19 (Suslin [75, Conj.4.1]) 体 k における素体の代数的閉包を k_0 とすると，k の有理数係数のモチビック・コホモロジーは環として $k^\times \cong H^1_{\mathcal{M}}(k,\mathbb{Z}(1))$ と k_0 のモチビック・コホモロジーによって生成される．言い換えれば，次の次数付き環の準同型は全射である：

$$K^M_*(k)_{\mathbb{Q}} \otimes H^*_{\mathcal{M}}(k_0,\mathbb{Q}(*)) \to H^*_{\mathcal{M}}(k,\mathbb{Q}(*)).$$

Suslin の元々の $\mathbb{Z}$ 係数に関する予想は正しくなかったが，有理数係数のケースが成り立つと予想されている．Suslin 予想が成り立てば，正標数の場合，$H^0_{\mathcal{M}}(\mathbb{F}_q,\mathbb{Q}(0))$ 以外は $\mathbb{F}_q$ のすべてのモチビック・コホモロジー群が消えるので，$i\neq n$ のとき $H^i_{\mathcal{M}}(k,\mathbb{Q}(n))=0$ であることが従う．一方，Suslin 予想の下で，標数が 0 のとき，有理数体の代数的拡大 k_0 のモチビック・コホモロジー $H^i_{\mathcal{M}}(k_0,\mathbb{Q}(n))$ が $i\leq 0$ に対して消えるので，Beilinson–Soulé 予想が従い，$i<n$ のとき

$$K^M_{i-1}(k)_{\mathbb{Q}} \otimes H^1_{\mathcal{M}}(k_0,\mathbb{Q}(n+1-i)) \to H^i_{\mathcal{M}}(k,\mathbb{Q}(n))$$

が全射であることが予想されている．

2.4 Tate 予想と Beilinson 予想

上述した予想と違って，これらはモチビック・コホモロジー自体の性質ではなくて，エタール・コホモロジーとの比較の予想である．エタール・コホモロジーはねじれ群係数をとらないと有限生成ではないが，l-進コホモロジー群 $H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_l(n)) = \mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \lim_{\leftarrow r} H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/l^r(n))$ を定義すると，後者は標数が l と異なる代数閉体上の多様体のとき有限生成な $\mathbb{Q}_l$-線形空間となる．サイクル写像 $CH^n(X) \to H^{2n}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/l^r(n))$ の逆極限をとって，k の代数的閉包 $\bar{k}$ への係数拡大 $\bar{X}=X\times_k \bar{k}$ へ引き戻すと，

$$ch^{n,l}_X : CH^n(X)\otimes\mathbb{Q}_l \to H^{2n}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_l(n)) \to H^{2n}_{\text{ét}}(\bar{X},\mathbb{Q}_l(n))^{\mathrm{Gal}(k)} \tag{7}$$

を得る．右辺は l 進コホモロジー群の Galois 作用の下での不変部分群を表す．

予想 20 (Tate [82, Conj.1], [84]) 基礎体 k が素体上有限生成で X が k 上スムーズかつ射影的

のとき，$ch_X^{n,l}$ は全射であり，$H^{2n}_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Q}_l(n))$ への Galois 作用が半単純である．

この予想の $n=1$ のケースは，有限体上及び有理数体上のアーベル多様体の場合，それぞれ Tate と Faltings によって示された ([83], [13])．特に，曲線の場合も Tate 予想が知られている．一般に，有限体上でも，低次元の特別な例 ([73], [84] を参照) 以外，この予想は知られていない．

Beilinson によって，有限体上の多様体の代数的サイクルに対する有理同値と数値同値の違いはねじれ群であることが予想された ([4, 1.0])．特に，サイクル写像が単射であることが予想されている．有限体上の Tate 予想と Beilinson 予想を併せてまとめる：

予想 21 (Tate–Beilinson)　任意の $\mathbb{F}_q$ 上のスムーズかつ射影的なスキーム X に対して，次のことが成り立つ．

1) サイクル射 (7) は全単射である．

2) $H^{2n}_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Q}_l(n))$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q)$-加群として半単純である．

この予想は l によらない ([84, Thm.2.9])．

命題 22 ([16])　Tate–Beilinson 予想が成立すれば，Parshin 予想も成り立つ．

証明の概略を述べる．Frobenius 射はモチビック・コホモロジー $H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(n))$ に q のべきで作用する．Chow モチーフの圏とは，体上の射影的でスムーズな多様体 X を対象とし，写像が $\mathrm{Hom}(X, Y) = CH^{\dim X}(X \times Y)_{\mathbb{Q}}$ により定まる圏に，さらに形式的射影 (つまり $p^2 = p \in \mathrm{End}(X) = CH^{\dim X}(X \times X)_{\mathbb{Q}}$ を満たす自己準同型) の像を加えた圏である．スキームの間の射はグラフとして Chow モチーフの圏の射と見なせるから，射影的でスムーズな多様体のなす圏から Chow モチーフの圏への関手が存在する．例えば，射影曲線 $\mathbb{P}^1$ は射影 $\mathbb{P}^1 \times \{0\}$ と $\{0\} \times \mathbb{P}^1 \in CH^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)_{\mathbb{Q}}$ で $\mathrm{Spec}\, k \oplus L$ に分解する．直和因子 L が Lefschetz モチーフと呼ばれる．自己準同型群 $CH^{\dim X}(X \times X)_{\mathbb{Q}}$ が $H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(n))$ に作用するので，多様体の Chow モチーフの圏で分解するときモチビック・コホモロジーは同様に分解する．Tate–Beilinson 予想が正しいとすると，有限体上の Chow モチーフは Frobenius 射の作用によって同型類を除き一意に定まる．Frobenius 射が q のべきで作用するモチーフは Lefschetz モチーフのべき $L^{\otimes j}$ のみである．言い換えると，Lefschetz モチーフ以外のモチーフの Frobenius の作用は q のべきを固有値に持たない．従って，Lefschetz モチーフ以外のモチーフのモチビック・コホモロジーが消える．Lefschetz モチーフのモチビック・コホモロジーについては，Lefschetz モチーフが射影空間の直和因子であることから，$i \neq 2n$ のとき $H^i_{\mathcal{M}}(L^{\otimes j}, \mathbb{Q}(n)) = 0$ であることが簡単に分かる．

3　応用

高次 Chow 群の応用は多いが，著者が詳しいもののみ紹介する．

3.1　双対性：コンパクト台コホモロジー

定理 23 (Grothendieck の古典的な双対性)　X を閉体 k 上スムーズかつ連結で，次元が d の代数多様体とし，m を k の標数で割れない整数，$\mathcal{F}$ を X 上の $m\mathcal{F} = 0$ を満たす局所定数エタール層とする．$\mathcal{F}^\wedge = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mu_m^{\otimes d})$ とおく．このとき，カップ積は有限群の完全な双対

$$H^i_c(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \times H^{2d-i}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}^\wedge) \to \mathbb{Z}/m$$

を導く．

証明のため，まず任意の多様体 $f: X \to k$ に対し，コンパクト台コホモロジー $R\Gamma_c(X,-)$ の右随伴関手 $Rf^!$ を構成し，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m}(R\Gamma_c(X,\mathcal{F}^\cdot),\mathcal{G}^\cdot) \cong \mathrm{Hom}_{X,\mathbb{Z}/m}(\mathcal{F}^\cdot, Rf^!\mathcal{G}^\cdot)$ を得る．証明の一番難しい部分は f がスムーズの場合に，$Rf^!\mathbb{Z}/m \cong \mu_m^{\otimes d}[2d]$ を示すことである．これより

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m}(H^i_c(X_{\text{ét}},\mathcal{F}),\mathbb{Z}/m) \cong \mathrm{Ext}^{-i}_{X,\mathbb{Z}/m}(\mathcal{F}, Rf^!\mathbb{Z}/m) \cong \mathrm{Ext}^{2d-i}_{X,\mathbb{Z}/m}(\mathcal{F},\mu_m^{\otimes d})$$

を得る．$\mathcal{F}$ が局所定数なので，Ext の局所化スペクトル系列が退化し，定理が従う．任意の X に一般化するためには $Rf^!\mathbb{Z}/m$ が分かれば十分である．X 上の高次 Chow 複体をエタール層の複体 $\mathbb{D}_X : U \mapsto z_0(U,*)$ と見なす．

定理 24 ([22]) k を閉体とし，$f: X \to Y$ を k 上の (任意の) 多様体の間の射とする．任意の正の整数 m に対して，$Rf^!(\mathbb{D}_Y/m) \cong \mathbb{D}_X/m$．特に，$Y = k$ の場合，$Rf^!\mathbb{Z}/m \cong \mathbb{D}_X/m$.

証明の概略は, 局所化を使ってスムーズで射影的な場合に帰着し, Grothendieck の双対性及び Milne の p 進双対性 [57] と比較することである．

系 25 $\mathcal{F}$ を X 上の構成可能なエタール層とする (例えば，局所定数ねじれ層).

1) X を閉体上の多様体とすると，有限群の完全な双対

$$H^i_c(X_{\text{ét}},\mathcal{F}) \times \mathrm{Ext}^{1-i}_X(\mathcal{F},\mathbb{D}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が存在する.

2) X が有限体上の多様体の場合，有限群の完全な双対

$$H^i_c(X_{\text{ét}},\mathcal{F}) \times \mathrm{Ext}^{2-i}_X(\mathcal{F},\mathbb{D}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が存在する.

基礎体が標数 0 の局所体の場合も同様な定理が存在する．Grothendieck の定理 23 は定理 7 によって系 25 に含まれている．X の次元が 1 のとき，上の定理は Deninger [12] により，X の次元が 2 のときは Spiess [71] により証明された．Deninger と Spiess が利用した複体が $\mathbb{D}$ と擬同型であることはそれぞれ Nart [61] と Zhong [88] によって証明された.

X が有限体上の曲線の場合，ねじれ係数に限らない類似も成り立つ ([26]).

3.2 双対性：コホモロジー

Suslin ホモロジーはエタール (前) 層でないため，エタール層の比較で証明した Chow 群の双対性の方針はここでうまく使えないが，Suslin–Voevodsky は定係数の場合に一般のエタール・コホモロジーとの双対性を証明した：

定理 26 ([79]) X を閉体 k 上の多様体とする．k の標数で割れない整数 m に対して

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/m) \times H^S_i(X,\mathbb{Z}/m) \to \mathbb{Z}/m$$

は有限群の完全な双対である.

係数の位数が標数と素でない場合，定理の類似は成り立たない．例えば，$H^S_1(\mathbb{A}^1,\mathbb{Z}/p) = 0$ だが, $H^1_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1,\mathbb{Z}/p)$ は無限である．実は，$H^S_1(\mathbb{A}^1,\mathbb{Z}/p)$ は馴分岐エタール・コホモロジーと双対である ([31])．有限体上, 上記の定理と有限体の Galois コホモロジーの双対性を合わせることができる．$\bar{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$ を X の代数閉包への係数拡大とし，Weil–Suslin ホモロジー $H^{WS}_i(X,\mathbb{Z})$ を 2 重複体の全

複体

$$C_*(\bar{X}) \xrightarrow{\varphi-1} C_*(\bar{X}) \tag{8}$$

の i 次ホモロジーと定義する．ただし，右辺の複体を次数 0 とし，$\varphi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q)$ は $x \mapsto x^q$ として $\bar{\mathbb{F}}_q$ に作用させる．定義から，Weil 群 $G = \langle\varphi\rangle \subseteq \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q)$ とすると，完全列

$$0 \to H_i^S(\bar{X}, \mathbb{Z})_G \to H_i^{WS}(X, \mathbb{Z}) \to H_{i-1}^S(\bar{X}, \mathbb{Z})^G \to 0$$

がある．

系 27 ([24]) X が有限体上の多様体のとき，標数と素な整数 m に対して

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/m) \times H_i^{WS}(X, \mathbb{Z}/m) \to \mathbb{Z}/m$$

は有限群の双対である．

3.3 高次元類体論 ([43])

SGA3 X §6 の拡大基本群 (groupe fondamentale élargi) を導入する ([35])．G を群，X を連結なネータースキームとし，G が X 上のスキーム $P \to X$ に作用しているとする．P が X 上の G トーサーとは，自然な写像 $P \times G \to P \times_X P$，$(p, g) \mapsto (gp, p)$ は同型であり，平坦な全射 $X' \to X$ が存在し，基底拡大 $P \times_X X' \to X'$ が自明となる (つまり切断が存在する) ことをいう．X の幾何的点 $\xi : \mathrm{Spec}\, \bar{k} \to X$ を一つ取ると，ファイバー P_ξ は閉体上のトーサーなので自明である．点 ξ 上に点を持つ X 上の G トーサー P の同型類全体の集合を $\pi^1(X, \xi, G)$ と表す．A がアーベル群のとき，同型 $\pi^1(X, \xi, A) \cong H^1_{\text{ét}}(X, A)$ が存在する．

群の圏から集合の圏への関手 $G \mapsto \pi^1(X, \xi, G)$ は射影極限的に表現可能である，つまり群の射影系 $\Pi(X) = (\pi_\alpha)_\alpha$ が存在し，

$$\pi^1(X, \xi, G) \cong \mathrm{Hom}_{\text{副群}}(\Pi(X), G) = \operatorname*{colim}_\alpha \mathrm{Hom}_{\text{群}}(\pi_\alpha, G)$$

が成り立つ．SGA1 で定義された一般の基本群 $\pi_1(X, \xi)$ ([34], [56]) は $\Pi(X)$ の副有限完備化と同型である：

$$\pi_1(X, \xi) \cong \lim_{\alpha, U_\alpha \subseteq \pi_\alpha} \pi_\alpha / U_\alpha.$$

X が正規のとき，π_α たちが有限だから，$\Pi(X)$ は $\pi_1(X, \xi)$ に他ならない．一方，正規でないときはこれは一般に成り立たない．例えば，X を結節点を一つ持つ閉体上の有理曲線とすると，$\Pi(X)$ は定数副群 $\mathbb{Z}$ と同型になる．$\Pi^{\mathrm{ab}}(X) = (\pi_\alpha^{\mathrm{ab}})_\alpha$ はアーベル群の圏へ制限した関手 $A \mapsto \pi^1(X, \xi, A)$ を射影極限的に表現する．

X が体 k 上有限型のとき，$\Pi^{\mathrm{ab}}(X)^{\mathrm{geo}} = \ker(\Pi^{\mathrm{ab}}(X) \to \Pi^{\mathrm{ab}}(k))$ を X の幾何的基本群と呼ぶ．同様に $H_0^S(X, \mathbb{Z})^0 = \ker(H_0^S(X, \mathbb{Z}) \overset{deg}{\to} H_0^S(k, \mathbb{Z}))$ とおいておく．

任意の点 $x \in X$ に対して，x の剰余体 $k(x)$ から自然な推進写像 $(i_x)_* : \Pi^{\mathrm{ab}}(k(x)) \to \Pi^{\mathrm{ab}}(X)$ が存在する．X が整数環 $\mathbb{Z}$ 上有限型のとき，閉点 x の剰余体 $k(x)$ は有限体なので，X の基本群の元 $(i_x)_*(\varphi_{k(x)})$ を得る．ただし有限体 k に対して φ_k は k の代数的閉包における Frobenius 置換 $t \mapsto t^{|k|}$ である．X が固有の場合，対応 $[x] \mapsto (i_x)_*(\varphi_{k(x)})$ がアーベル化された基本群への準同型写像

$rec: CH_0(X) \to \Pi^{\mathrm{ab}}(X)$ を誘導する．基礎体が有限体の場合，X が射影的でない場合にも $rec:$ $H_0^S(X,\mathbb{Z})^0 \to \Pi^{\mathrm{ab}}(X)^{\mathrm{geo}}$ を誘導する．

定理 28 (加藤–斎藤 [45]) 1) X が有限体上スムーズで固有のとき，写像 rec は有限群の同型

$$H_0^S(X,\mathbb{Z})^0 \cong \Pi^{\mathrm{ab}}(X)^{\mathrm{geo}}$$

を導く．

2) X を大域体の整数環上平坦で固有かつ正則なスキームとすると，rec は有限群の同型

$$CH_0(X) \cong \tilde{\Pi}^{\mathrm{ab}}(X)$$

を導く．ここで $\tilde{\Pi}^{\mathrm{ab}}(X)$ はすべての実素点上完全分解する基本群の商群を表す．

X の次元が 1 の場合，これは不分岐類体論の主定理 $\mathrm{Pic}\,\mathcal{O}_K \cong \mathrm{Gal}(H/K)$ の幾何学的類似に他ならない (ただし，H は大域体 K の Hilbert 類体である)．

X が固有でないとき，上の定理は馴分岐な被覆を使って一般化される．体上の正規な曲線 C の被覆について，馴分岐とは次のことである．C の正規射影モデルを $\tilde{C}$ と記す．有限エタール被覆 $f:$ $D \to C$ は正規で射影的なモデル $\tilde{D}$ からの有限写像 $\tilde{D} \to \tilde{C}$ を誘導する．f が馴分岐とはすべての $x \in \tilde{D} - D$ に対して，その惰性群の位数が基礎体の標数で割れないことである．一般の場合，エタール有限射 $X' \to X$ が馴分岐とは，すべての正規な曲線からの射 $C \to X$ に対して，引き戻し $C' =$ $X' \times_X C \to C$ が馴分岐であることである．X がスムーズのとき，この概念は一般の因子で定義された馴分岐の概念と一致し，馴分岐な被覆を分類する馴分岐基本群 $\Pi^t(X)$ が定義される．U が標数 p の体 k 上スムーズで固有なスキーム X の開部分スキームの場合，$l \neq p$ の l 進部分群 $\Pi^t(U)_l$ は $\Pi(U)_l$ と同型で，p 進部分 $\Pi^t(U)_p$ は $\Pi(X)_p$ と同型である．

定理 29 (Schmidt–Spiess [69]) 有限体上スムーズな U に対し，自然な写像は有限群の同型を誘導する：

$$rec: H_0^S(U,\mathbb{Z})^0 \cong \Pi^{\mathrm{ab},t}(U)^{\mathrm{geo}}.$$

U が正規のとき，Lang によって rec は全射であるが ([47])，一般には単射でない ([53])．Suslin ホモロジーを Weil–Suslin ホモロジー (8) に置き替えると，上記の定理の類似を証明できる．引き戻し写像 $C_*(U) \to C_*(\bar{U})$ は自然な準同型 $\alpha_i: H_i^S(U,\mathbb{Z}) \to H_{i+1}^{WS}(U,\mathbb{Z})$ を誘導する．U がスムーズなとき，α_i は同型であることが予想されている．特異点の解消の下で，これは有限係数の場合には Jannsen–Kerz–斎藤の定理 [46] から従う ([24])．

定理 30 (Geisser–Schmidt [24], [32]) U が有限体上の多様体のとき，自然な準同型

$$rec: H_1^{WS}(U,\mathbb{Z})^0 \to \Pi^{\mathrm{ab},t}(U)^{\mathrm{geo}}$$

は全射であり，特異点の解消が存在すれば，副有限完備化が同型になる．

また，上記 Parshin 予想が正しく，特異点の解消が存在すれば，両辺は有限生成でかつ rec が同型になる．

3.4 Rojtman の定理 ([67])

C を複素数体上のスムーズな射影曲線とし，

$$Jac_C = \mathrm{Hom}(H^0(C, \Omega^1), \mathbb{C})/H_1(C, \mathbb{Z})$$

を C の Jacobi 多様体とする．

定理 31 (Abel–Jacobi) 上の条件の下で，次の写像は同型である：

$$\rho : H_0^S(C, \mathbb{Z})^0 \xrightarrow{\sim} Jac_C,$$
$$\sum_i n_i x_i \mapsto \Big(\omega \mapsto \sum_i n_i \int_0^{x_i} \omega\Big).$$

一般に X を代数閉体 k 上の被約な多様体とし，X の基点 x を固定する．このとき，基点を保つ X から準アーベル多様体 (つまりアーベル多様体のトーラスによる拡大) への写像の普遍的な対象 $f_x : X \to \mathrm{Alb}_X(k)$ が存在し，Albanese 多様体と呼ぶ (X が固有のとき，Albanese 多様体のトーラスは自明なので，古典的な概念と一致する)．f_x を線形的に拡張したもの

$$\bigoplus_{x \in X_{(0)}} \mathbb{Z} \to \mathrm{Alb}_X(k),$$
$$\sum_i n_i x_i \mapsto \sum_i n_i f_x(x_i)$$

は Albanese 写像 $alb_X : H_0^S(X, \mathbb{Z})^0 \to \mathrm{Alb}_X(k)$ を誘導し，これは x の取り方によらない．X がスムーズな曲線のとき，Alb_X は Jac_X に他ならないので，alb_X は上述した ρ の一般化である．

Abel–Jacobi 定理の一般化について，Mumford [60] は反例を与えた．すなわち，X を複素数体上の幾何種数が 0 でない曲面とすると，Albanese 写像の核は巨大である (逆のこと，つまり幾何種数が 0 であるとき，Albanese 写像は同型となることは Bloch によって予想された [5])．一方，ねじれ部分群に制限すると，Albanese 写像は同型を引き起こすことが証明されている：

定理 32 ([28]) X を閉体上の正規な代数多様体とする．このとき，Albanese 写像はねじれ部分群の同型を誘導する：

$$alb_X : {}_{\mathrm{tor}}H_0^S(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} {}_{\mathrm{tor}}Alb_X(k).$$

(標数のべきのねじれ部分群の扱いには特異点の解消の存在が必要である)．

この定理は，Rojtman [65] によって，X が固有かつスムーズの場合，標数と素な位数を持つねじれ部分群に対して証明されたあと，Bloch [6] がコホモロジー的な証明を与え，Milne [55] によって標数のべきの位数を持つ場合も含めて証明された．さらにスムーズだが固有に限らない多様体の場合，Spiess–Szamuely [72] によって標数と素な位数を持つねじれ部分群に対して証明された．Barbieri–Viale と Kahn [1] は標数 0 のとき，著者は一般の場合に定理を上記の形で証明した．その際，両辺のハイパーカバーが両立することを示すのが重要であった ([27])．

4 ζ 関数の特殊値

4.1 ζ 関数

q を素数 p のべきとし，X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の多様体とするとき，X の $\mathbb{F}_{q^r}$ における有理点の数 $n_r = |X(\mathbb{F}_{q^r})|$ が重要である．例えば，X が環 $\mathbb{F}_q[T_1, \ldots, T_n]/(f_1, \ldots, f_m)$ に対応する多様体であれば，X の $\mathbb{F}_{q^r}$ 有理点は，多項式 $f_1, \ldots, f_m$ の共通根 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_{q^r}$ である．$\mathbb{F}_{q^r}$ は $\mathbb{F}_q$ 上 r 個の自

己同型を持つので，共役な解を r 回繰り返して数えないように n_r/r の情報をまとめ，

$$Z(X,T)=\exp\left(\sum_r \frac{n_r}{r}T^r\right)$$

と定義する．さらに変数の変換をし，

$$\zeta(X,s)=Z(X,q^{-s})$$

とおく．こうした ζ 関数は任意の n_r についての情報を持ち，基礎体 $\mathbb{F}_q$ によらない．$X_{(0)}$ を X の閉点全体とすると

$$\zeta(X,s)=\prod_{x\in X_{(0)}}\frac{1}{1-|k(x)|^{-s}} \tag{9}$$

という ζ 関数の Euler 積表示を得る．これは X の各点ごとに定まっているので，ζ 関数は局所的な不変量と考えられる．公式 (9) は任意の $\mathbb{Z}$ 上の多様体に一般化される．例えば，X が代数体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ のとき，$\mathcal{O}_K$ の素イデアル $\mathfrak{p}\neq 0$ の全体は $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ の閉点全体で，$\mathcal{O}_K$ の ζ 関数は Dedekind ζ 関数になる：

$$\zeta_K(s)=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-|k(\mathfrak{p})|^{-s}}.$$

X がスムーズで次元は d で，かつ射影的ならば，Dwork–Grothendieck–Deligne 定理 (Weil 予想) により

$$Z(X,T)=\frac{P_1(T)\cdots P_{2d-1}(T)}{P_0(T)\cdots P_{2d}(T)}.$$

ただし $P_i(T)\in\mathbb{Q}[T]$ は多項式で，$P_i(T)$ の根のすべての共役は絶対値が $q^{-i/2}$ の代数的整数である (Riemann 仮説の類似)．これを証明するために，Grothendieck は上述した l 進コホモロジーを導入し，$P_i(T)=\det(1-\varphi T|H^i_{\text{ét}}(\bar{X},\mathbb{Q}_l))$ を示した．ここで，φ は Frobenius 置換である．

4.2 ζ 関数の特殊値

Dedekind ζ 関数の 0 と 1 における特殊値は類数公式で表される．K の類数を h，K の単数基準を R，K 内の 1 のべき根の個数を w，K の実素点の個数を r_1，複素素点の個数を r_2，判別式を d とおく．s が 1 に近づくとき，

$$\zeta_K(s)\sim(s-1)^{-1}\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}hR}{w\sqrt{|d|}}$$

s が 0 に近づくとき，

$$\zeta_K(s)\sim s^{r_1+r_2-1}\frac{-hR}{w}$$

という古典的な定理がある．ζ 関数は局所的に定義されていて，コホモロジー群は大域的に定義されているから，s が n に近づくときの $\zeta(X,s)$ の振る舞いをコホモロジー群で表すことは局所大域原理と考えられる．Lichtenbaum は有限体上の多様体での類似，$0,1$ 以外の整数への一般化を考察して，次の予想を提起した．

予想 33 (Lichtenbaum [51])　X が有限体上スムーズで射影的とする．このとき，

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(n)) = \begin{cases} \text{有限} & i \neq 2n, 2n+2; \\ \text{有限生成} & i = 2n; \\ \text{余有限生成} & i = 2n+2 \end{cases}$$

かつ，$\zeta(X,s)$ の $s \to n$ のときの漸近挙動は $H^*_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(n))$ で表される．

余有限生成とは，自然数 r に対して $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^r \oplus$ 有限群 で表される群である．余有限生成な群が公式に入るため，この $\zeta(X,n)$ の公式は書きにくいので，エタール・コホモロジーを改良してから与える．

Lichtenbaum 予想は非常に深い予想である．例えば，$n=1$ のとき，$H^3_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(1))$ は Brauer 群と同型で，その有限生成性は余次元 1 の Tate 予想と同値である．

4.3　Weil-エタール・コホモロジー

Lichtenbaum は 2001 年に Weil-エタール・コホモロジー $H^*_W(X,-)$ を導入し，$\mathbb{Z}$ 係数の Weil-エタール・コホモロジーと ζ 関数の $s=0$ における特殊値の関係を表した ([52])．簡単に言えば，Weil-エタール・コホモロジーは $\mathbb{F}_q$ の絶対 Galois 群 $\hat{\mathbb{Z}}$ を Frobenius 置換 φ が生成する Weil 群で取り替えた群によって与えられるものである．例えば，

$$H^1_{\text{ét}}(\mathbb{F}_q,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\text{連続}}(\hat{\mathbb{Z}},\mathbb{Z}) = 0, \qquad H^2_{\text{ét}}(\mathbb{F}_q,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

であるが，

$$H^1_W(\mathbb{F}_q,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \qquad H^2_W(\mathbb{F}_q,\mathbb{Z}) \cong 0$$

のように Weil-エタール・コホモロジーはエタール・コホモロジーより簡単だと分かる．一般に，Weil-エタール・コホモロジーとエタール・コホモロジーの関係は次の定理で分かる：

定理 34 ([18])　X を $\mathbb{F}_q$ 上の多様体とし，$\mathcal{F}^{\cdot}$ を X 上のエタール層の複体とする．次の長完全列が存在する：

$$\cdots \to H^i_{\text{ét}}(X,\mathcal{F}^{\cdot}) \to H^i_W(X,\mathcal{F}^{\cdot}) \to H^{i-1}_{\text{ét}}(X,\mathcal{F}^{\cdot})_{\mathbb{Q}} \to H^{i+1}_{\text{ét}}(X,\mathcal{F}^{\cdot}) \to \cdots.$$

特に $\mathcal{F}^{\cdot}$ のコホモロジー層がねじれ群ならば，$H^i_{\text{ét}}(X,\mathcal{F}^{\cdot}) \cong H^i_W(X,\mathcal{F}^{\cdot})$．$\mathcal{F}^{\cdot}$ が $\mathbb{Q}$ 加群ならば，長完全列が分裂し，

$$H^i_W(X,\mathcal{F}^{\cdot}) \cong H^i_{\text{ét}}(X,\mathcal{F}^{\cdot}) \oplus H^{i-1}_{\text{ét}}(X,\mathcal{F}^{\cdot}). \tag{10}$$

モチビック複体 $\mathbb{Z}(n)$ による Weil-エタール・コホモロジーと ζ 関数の関係について，次の主予想がある．$n=0$ の場合は Lichtenbaum [52] の予想である．$H^1_W(\mathbb{F}_q,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 e を一つとる．$e^2 \in H^2_W(\mathbb{F}_q,\mathbb{Z}) = 0$ なので，e とのカップ積によって複体

$$\ldots \xrightarrow{\cup e} H^{i-1}_W(X,\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\cup e} H^i_W(X,\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\cup e} H^{i+1}_W(X,\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\cup e} \ldots$$

が定義される．この複体の有理数係数の類似は (10) より完全なので，この複体のコホモロジーはねじれ群である．特に，固定した n に対して，$H^i_W(X,\mathbb{Z}(n))$ が有限生成群で，有限個の i を除いて消えることを仮定すると，この複体の Euler 標数 $\chi(H^{\bullet}_W(X,\mathbb{Z}(n)),e)$ が定義できる (有限個の有限なコ

ホモロジーを持つ複体 $C^\cdot$ の Euler 標数は $\chi(C^\cdot) = \prod_i |H^i(C^\cdot)|^{(-1)^i}$ である).

予想 35 X を $\mathbb{F}_q$ 上のスムーズで射影的なスキームとする.

(1) モチビック複体 $\mathbb{Z}(n)$ の Weil-エタール・コホモロジー $H^i_W(X, \mathbb{Z}(n))$ は有限生成であり，任意の素数 l に対して，l 進コホモロジーの整数モデルである：

$$H^i_W(X, \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{Z}_l \cong H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l(n)).$$

(2) 階数の交代和 $\sum_i (-1)^i \operatorname{rank} H^i_W(X, \mathbb{Z}(n))$ が消え，階数の重み付き交代和は $s = n$ における $\zeta(X, s)$ の零点の位数 ρ_n と等しい：

$$\sum_i (-1)^i i \cdot \operatorname{rank} H^i_W(X, \mathbb{Z}(n)) = \operatorname{ord}_{s=n} \zeta(X, s).$$

(3) $s \to n$ のとき,

$$\zeta(X, s) \sim \pm(1 - q^{n-s})^{\rho_n} \cdot \chi(H^*_W(X, \mathbb{Z}(n)), e) \cdot q^{\chi(n)}.$$

ただし，$\chi(n)$ は Milne の標数である ([57])：

$$\chi(n) = \sum_{0 \le i \le n} \sum_j (-1)^{i+j} (n - i) \dim H^j(X, \Omega^i).$$

$n \le 0$ または X が 3 個以下の曲線の積のとき，予想 35 が成り立つ ([18, Prop. 9.2, 9.4]). [19] では，スムーズと固有に限らない場合も，コンパクト台 Weil-エタール・コホモロジーを使うことで，同様な主張が予想されている．この予想は，特異点解消を仮定すれば，スムーズで射影的な場合に帰着できる．論文 [18] の主定理は次の通りである.

定理 36 ([18, Thm.8.4]) 予想 21 と予想 35 は同値である.

文 献

[1] L. Barbieri-Viale and B. Kahn, On the derived category of 1-motives, arXiv:math.AG/1009.1900.

[2] H. Bass, Some problems in “classical” algebraic K-theory, In: Algebraic K-theory. II: “Classical” Algebraic K-theory, and Connections with Arithmetic, Seattle, WA, USA, 1972, (ed. H. Bass), Lecture Notes in Math., **342**, Springer, 1973, pp. 3–73.

[3] A. A. Beĭlinson, Higher regulators and values of L-functions, Current problems in mathematics, **24**, 181–238, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1984.

[4] A. A. Beĭlinson, Height pairing between algebraic cycles, In: K-theory, Arithmetic and Geometry, Moscow, 1984–1986, (ed. Yu. I. Manin), Lecture Notes in Math., **1289**, Springer, 1987, pp. 1–25.

[5] S. Bloch, K_2 of Artinian Q-algebras, with application to algebraic cycles, Comm. Algebra, **3** (1975), 405–428.

[6] S. Bloch, Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman, Compositio Math., **39** (1979), 107–127.

[7] S. Bloch, Algebraic cycles and higher K-theory, Adv. in Math., **61** (1986), 267–304.

[8] S. Bloch, Algebraic cycles and the Beĭlinson conjectures, In: The Lefschetz Centennial Conference. Part I, Mexico City, 1984, (ed. D. Sundararaman), Contemp. Math., **58**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 65–79.

[9] S. Bloch, The moving lemma for higher Chow groups, J. Algebraic Geom., **3** (1994), 537–568.

[10] S. Bloch and K. Kato, p-adic étale cohomology, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **63** (1986), 107–152.

[11] A. Borel, Stable real cohomology of arithmetic groups, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **7** (1974), 235–272.

[12] C. Deninger, Duality in the étale cohomology of one-dimensional proper schemes and generalizations, Math. Ann., **277** (1987), 529–541.

[13] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, Invent. Math., **73**

(1983), 349–366.
[14] E. M. Friedlander and A. A. Suslin, The spectral sequence relating algebraic K-theory to motivic cohomology, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **35** (2002), 773–875.
[15] E. M. Friedlander and V. Voevodsky, Bivariant cycle cohomology, In: Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories, (eds. V. Voevodsky, A. A. Suslin and E. M. Friedlander), Ann. of Math. Stud., **143**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, pp. 138–187.
[16] T. Geisser, Tate's conjecture, algebraic cycles and rational K-theory in characteristic p, K-Theory, **13** (1998), 109–122.
[17] T. Geisser, Motivic cohomology over Dedekind rings, Math. Z., **248** (2004), 773–794.
[18] T. Geisser, Weil-étale cohomology over finite fields, Math. Ann., **330** (2004), 665–692.
[19] T. Geisser, Arithmetic cohomology over finite fields and special values of ζ-functions, Duke Math. J., **133** (2006), 27–57.
[20] T. Geisser, Motivic Cohomology, K-theory and Topological Cyclic Homology, In: Handbook of K-theory. Vol. 1, Springer, 2005, pp. 193–234.
[21] T. Geisser, Parshin's conjecture revisited, In: K-theory and Noncommutative Geometry, Valladolid, 2006, (eds. G. Cortiñas, J. Cuntz, M. Karoubi, R. Nest and C. A. Weibel), EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zurich, 2008, pp. 413–425.
[22] T. Geisser, Duality via cycle complexes, Ann. of Math. (2), **172** (2010), 1095–1126.
[23] T. Geisser, Arithmetic homology and an integral version of Kato's conjecture, J. Reine Angew. Math., **644** (2010), 1–22.
[24] T. Geisser, On Suslin's singular homology and cohomology, Doc. Math. 2010, Extra volume: Andrei A. Suslin's sixtieth birthday, 223–249.
[25] T. Geisser, Finite generation conjectures for motivic cohomology theories over finite fields, In: Regulators, Barcelona, 2010, (eds. José Ignacio Burgos Gil, Rob de Jeu, James D. Lewis, Juan Carlos Naranjo, Wayne Raskind and Xavier Xarles), Contemp. Math., **571**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 153–165.
[26] T. Geisser, Duality for $\mathbb{Z}$-constructible sheaves on curves over finite fields, Doc. Math., **17** (2012), 989–1002.
[27] T. Geisser, Homological descent for motivic homology theories, Homology Homotopy Appl., **16** (2014), 33–43.
[28] T. Geisser, Rojtman's theorem for normal schemes, arXiv:math.AG/1402.1831.
[29] T. Geisser and M. Levine, The K-theory of fields in characteristic p, Invent. Math., **139** (2000), 459–493.
[30] T. Geisser and M. Levine, The Bloch–Kato conjecture and a theorem of Suslin–Voevodsky, J. Reine Angew. Math., **530** (2001), 55–103.
[31] T. Geisser and A. Schmidt, Tame class field theory for singular varieties over algebraically closed fields, arXiv:math.AG/1309.4068.
[32] T. Geisser and A. Schmidt, Tame class field theory for singular varieties over finite fields, arXiv:math.NT/1405.2752.
[33] H. Gillet, Gersten's conjecture for the K-theory with torsion coefficients of a discrete valuation ring, J. Algebra, **103** (1986), 377–380.
[34] A. Grothendieck, Revêtements Étales et Groupe Fondamental, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA1), Lecture Notes in Math., **224**, Springer, 1971.
[35] A. Grothendieck, Charactérisation et classification de groupes de type multiplicaif, In: Schémas en Groupes II: Groupes de Type Multiplicatif, et Structure des Schémas en Groupes Généraux, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962–1964 (SGA3), (eds. M. Demazure and A. Grothendieck), Lecture Notes in Math., **152**, 1970, Springer, pp. 77–126.
[36] U. Jannsen, Hasse principles for higher-dimensional fields, arXiv:math.AG/0910.2803.
[37] U. Jannsen and S. Saito, Kato homology of arithmetic schemes, and higher class field theory over local fields, Doc. Math., Extra Vol. (2003), 479–538.
[38] U. Jannsen and S. Saito, Kato conjecture and motivic cohomology over finite fields, arXiv: math.AG/0910.2815.
[39] B. Kahn, Algebraic K-theory, algebraic cycles and arithmetic geometry, In: Handbook of K-theory. Vol. 1, Springer, 2005, pp. 351–428.
[40] B. Kahn, Sur le groupe des classes d'un schéma arithmétique, Bull. Soc. Math. France, **134** (2006), 395–415.
[41] B. Kahn, K-theory of semi-local rings with finite coefficients and etale cohomology, K-Theory, **25** (2002), 99–138.
[42] 加藤和也, 代数的 K 理論──その整数論的側面──, 数学, **34** (1982), 97–115.
[43] 加藤和也, 類体論の一般化, 数学, **40** (1988), 289–311.
[44] K. Kato, A Hasse principle for two-dimensional global fields, With an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène, J. Reine Angew. Math., **366** (1986), 142–183.
[45] K. Kato and S. Saito, Unramified class field theory of arithmetical surfaces, Ann. of Math. (2), **118** (1983), 241–275.
[46] M. Kerz and S. Saito, Cohomological Hasse principle and motivic cohomology for arithmetic schemes, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **115** (2012), 123–183.
[47] S. Lang, Unramified class field theory over

function fields in several variables, Ann. of Math. (2), **64** (1956), 285–325.

[48] M. Levine, Techniques of localization in the theory of algebraic cycles, J. Algebraic Geom., **10** (2001), 299–363.

[49] M. Levine, The homotopy coniveau tower, J. Topol., **1** (2008), 217–267.

[50] M. Levine, K-theory and motivic cohomology of schemes, K-theory Preprint Archives, **336**, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0336.

[51] S. Lichtenbaum, Values of zeta-functions at nonnegative integers, In: Number Theory, Noordwijkerhout, 1983, (ed. H. Jager), Lecture Notes in Math., **1068**, Springer, 1984, pp. 127–138.

[52] S. Lichtenbaum, The Weil-étale topology on schemes over finite fields, Compos. Math., **141** (2005), 689–702.

[53] K. Matsumi, K. Sato and M. Asakura, On the kernel of the reciprocity map of normal surfaces over finite fields, K-Theory, **18** (1999), 203–234.

[54] C. Mazza, V. Voevodsky and C. Weibel, Lecture Notes on Motivic Cohomology, Clay Math. Monogr., **2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2006.

[55] J. S. Milne, Zero cycles on algebraic varieties in nonzero characteristic: Rojtman's theorem, Compositio Math., **47** (1982), 271–287.

[56] J. S. Milne, Etale Cohomology, Princeton Math. Ser., **33**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.

[57] J. S. Milne, Values of zeta functions of varieties over finite fields, Amer. J. Math., **108** (1986), 297–360.

[58] J. Milnor, Algebraic K-theory and quadratic forms, Invent. Math., **9** (1970), 318–344.

[59] T. Moser, A duality theorem for étale p-torsion sheaves on complete varieties over a finite field, Compositio Math., **117** (1999), 123–152.

[60] D. Mumford, Rational equivalence of 0-cycles on surfaces, J. Math. Kyoto Univ., **9** (1968), 195–204.

[61] E. Nart, The Bloch complex in codimension one and arithmetic duality, J. Number Theory, **32** (1989), 321–331.

[62] Y. P. Nesterenko and A. A. Suslin, Homology of the general linear group over a local ring, and Milnor's K-theory, Math. USSR-Izv., **34** (1990), 121–145.

[63] D. Orlov, A. Vishik and V. Voevodsky, An exact sequence for $\mathrm{K}_*^M/2$ with applications to quadratic forms, Ann. of Math. (2), **165** (2007), 1–13.

[64] D. Quillen, Higher algebraic K-theory: I, In: Algebraic K-theory I: Higher K-theories, Seattle, WA, 1972, (ed. H. Bass), Lecture Notes in Math., **341**, Springer, 1973, pp. 85–147.

[65] A. Rojtman, The torsion of the group of 0-cycles modulo rational equivalence, Ann. of Math. (2), **111** (1980), 553–569.

[66] P. Roquette, Einheiten und Divisorklassen in endlich erzeugbaren Körpern, Jber. Deutsch. Math. Verein, **60** (1957), 1–21.

[67] 斎藤秀司, 代数的サイクルとホッヂ理論 (アーベルの定理の高次元化に向けて), 数学, **49** (1997), 113–120.

[68] A. Schmidt, Singular homology of arithmetic schemes, Algebra Number Theory, **1** (2007), 183–222.

[69] A. Schmidt and M. Spieß, Singular homology and class field theory of varieties over finite fields, J. Reine Angew. Math., **527** (2000), 13–36.

[70] J.-P. Serre, Morphismes universels et variété d'Albanese, Séminaire Claude Chevalley, **4** (1958–1959), 1–22.

[71] M. Spieß, Artin–Verdier duality for arithmetic surfaces, Math. Ann., **305** (1996), 705–792.

[72] M. Spieß and T. Szamuely, On the Albanese map for smooth quasi-projective varieties, Math. Ann., **325** (2003), 1–17.

[73] C. Soulé, Groupes de Chow et K-théorie de variétés sur un corps fini, Math. Ann., **268** (1984), 317–345.

[74] C. Soulé, Opérations en K-theorie algébrique, Canad. J. Math., **37** (1985), 488–550.

[75] A. A. Suslin, Algebraic K-theory of fields, In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vol. 1, 2, Berkeley, CA, 1986, (ed. A. M. Gleason), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 222–244.

[76] A. A. Suslin, Higher Chow groups and etale cohomology, In: Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories, (eds. V. Voevodsky, A. A. Suslin and E. M. Friedlander), Ann. of Math. Stud., **143**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, pp. 239–254.

[77] A. A. Suslin, On the Grayson spectral sequence, Proc. Steklov Inst. Math., **241**, no. 2 (2003), 202–237.

[78] A. A. Suslin and S. Joukhovitski, Norm varieties, J. Pure Appl. Algebra, **206** (2006), 245–276.

[79] A. A. Suslin and V. Voevodsky, Singular homology of abstract algebraic varieties, Invent. Math., **123** (1996), 61–94.

[80] A. A. Suslin and V. Voevodsky, Bloch–Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients, In: The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles, Banff, AB, 1998, (eds. B. B. Gordon, J. D. Lewis, S. Müller-Stach, S. Saito and N. Yui), NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., **548**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 117–189.

[81] 竹田雄一郎, V. Voevodsky による混合モチーフの圏の構成について, 数学, **53** (2001), 1–17.

[82] J. T. Tate, Algebraic cycles and poles of zeta functions, In: Arithmetical Algebraic Geometry, Purdue Univ., 1963, (ed. O. F. G. Schilling), Harper & Row, New York, 1965, pp. 93–110.

[83] J. Tate, Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, Invent. Math., **2** (1966), 134–144.

[84] J. Tate, Conjectures on algebraic cycles in l-adic cohomology, In: Motives, Seattle, WA, 1991, Proc. Sympos. Pure Math., **55**, part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 71–83.

[85] B. Totaro, Milnor K-theory is the simplest part of algebraic K-theory, K-Theory, **6** (1992), 177–189.

[86] V. Voevodsky, Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic, Int. Math. Res. Not., **2002**, no. 7 (2002), 351–355.

[87] V. Voevodsky, On motivic cohomology with $\boldsymbol{Z}/l$-coefficients, Ann. of Math. (2), **174** (2011), 401–438.

[88] C. Zhong, Comparison of dualizing complexes, J. Reine Angew. Math., **695** (2014), 1–39.

(2013 年 8 月 5 日提出)

(ガイサ トーマス・名古屋大学大学院多元数理科学研究科)