線形数学 I 補足

2000 年 7 月 13 日
数理・ 情報科学科 佐藤信哉

[1] 変数の数が式の数より多い斉次連立 1 次方程式は自明でない解を持つ．

連立 1 次方程式の n コの変数を $x_1, \cdots, x_n$とおき，これを縦に並べた $n \times 1$ 行列を$\boldsymbol{x}$とおく．連立 1 次方程式の係数行列を $A = (a_{ij})$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,\ m < n)$ と置けば，考えている斉次連立 1 次方程式は，$A\boldsymbol{x} = 0$ と表せる．拡大係数行列を$\hat{A}$ とすると，$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\hat{A}$なので，必ず解をもつことがわかる.（特に，この連立 1 次方程式は自明な解$\boldsymbol{x} = 0$ を持つ.）ところが，このとき，$\mathrm{rank}A \le m < n$ なので，$\mathrm{rank}A < n$. よって，上の連立 1 次方程式は，$n - \mathrm{rank}A \ne 0$ コの変数の値を定めるごとに解が定まることになる．すなわち，解は無数にある．

[2] $n > m$ とする．m コの 1 次独立なベクトルの 1 次結合として表される n コのベクトルはつねに 1 次従属である．すなわち，

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} \boldsymbol{a}_1 & = & a_{11}\boldsymbol{b}_1 & + & a_{21}\boldsymbol{b}_2 & + & \cdots & + & a_{m1}\boldsymbol{b}_m \\ \boldsymbol{a}_2 & = & a_{12}\boldsymbol{b}_1 & + & a_{22}\boldsymbol{b}_2 & + & \cdots & + & a_{m1}\boldsymbol{b}_m \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ \boldsymbol{a}_n & = & a_{1n}\boldsymbol{b}_1 & + & a_{2n}\boldsymbol{b}_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\boldsymbol{b}_m \end{array}\right.$$

と表されていたら，$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$は 1 次従属である．

証明： $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = 0$ のとき，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 以外の解を持つことを示せばよい．この式に$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$を$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$で表したものを代入して整理すると，$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\boldsymbol{b}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\boldsymbol{b}_2 + \cdots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)\boldsymbol{b}_m = 0$ となる．したがって，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = 0$ が非自明な解を持てばよい.（ここで，連立 1 次方程式の n コの変数を $x_1, \cdots, x_n$とおき，これを縦に並べた $n \times 1$ 行列を$\boldsymbol{x}$，$A = (a_{ij})$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ と置いた.）ところが，$n > m$ なので，これは上の [1] より従う．(証明終)

[3] Wを $\mathbb{R}^n$の部分空間とする．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$, $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m\}$ がともに Wの基底であるとすると，$m = n$.

(2) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を Wの基底とする．このとき，Wの中の n コのベクトル$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$が 1 次独立ならば，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ は Wの基底となる．

証明：(1) $m < n$ として，矛盾を導く．$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m\}$ は Wの基底であるので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$の 1 次結合で表すことができる．すると，$m < n$ なので，[2] より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$は 1 次従属となる．これは $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が Wの基底であることに反する．

(2) $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ が Wの基底でないとすると，Wのベクトル $\boldsymbol{x}$で，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$の 1 次結合で表せないものがある．したがって，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$は 1 次独立である．しかし，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は，Wの基底なので，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$は，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \cdots, \boldsymbol{a}_n$の 1 次結合として表されるのだから，これは上の [2] に反する．(証明終)

[3] により，次元の概念は，基底の取り方によらず定まることがわかった．

[4] $\mathbb{R}^n$の部分空間 $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ の次元は，$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$の中で，1 次独立なベクトルの最大個数である．

証明：rを$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$のうち 1 次独立なベクトルの最大個数とする．また，そのときの 1 次独立なベクトルを$\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$とおく．$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ の任意の元を$\boldsymbol{x}$とする．$\boldsymbol{x}$が$\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ の 1 次結合で表されればよい．そこで，$\boldsymbol{x}$が$\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$の 1 次結合で表せなかったとする．このとき，$(r + 1)$ コのベクトル$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$が 1 次独立となり，これは，$r$の取り方に矛盾する.（証明終）