線形数学 I 中間テスト 略解

数理・ 情報科学科 佐藤信哉

$\boxed{1}$

(1) 答えのみ． $x = \frac{1-4t}{3}$, $y = t$, $z = 0$, $w = 1$. ただし，t は任意の定数.

(2) 題意を満たすためには，次の行列の行列式の値が 0 でなければならない．

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

この行列式の値を計算すると，$(a-1)^2(a+2)$ となるので，a の値は $a = 1$ または $a = -2$ であることが必要である．以下，場合を分けて考える．

($a = 1$ のとき)

このとき，元の連立 1 次方程式は，$x + y + z = 0$ となるので，これを解いて，$x = -s - t$, $y = s$, $z = t$. (s, t は任意定数．)

($a = -2$ のとき)

もとの連立 1 次方程式は，

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

となる．基本変形をしていくと，$y = z$, $x + y - 2z = 0$ となる．これより，$x = y = z$ を得る．よって，このときの解は，$x = y = z = t$. (t は 0 以外の任意定数．)

$\boxed{2}$

(1) A, B をそれぞれ成分表示して，$A = (a_{ij})$ $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, l)$, $B = (b_{ij})$ $(i = 1, \ldots, l,\ j = 1, \ldots, n)$ とする．このとき，AB の (i, j)-成分は，$\sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$ となるので，${}^t(AB)$ の (i, j)-成分は，$\sum_{k=1}^{l} a_{jk} b_{ki}$ となる．${}^tA = (x_{ij})$ $(i = 1, \ldots, l,\ j = 1, \ldots, m)$, ${}^tB = (y_{ij})$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, l)$ とおくと，${}^tB{}^tA$ の (i, j)-成分は，$\sum_{k=1}^{l} y_{ik} x_{kj} = \sum_{k=1}^{l} b_{ki} a_{jk}$ となる．よって， 行列の各成分が等しいことが確かめられたので，${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$ が示された.

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく．(a, b, c, d は実数．) ケーリー・ハミルトンの式から，$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I = O$. 仮定から，$A^2 = O$ なので，$(a+d)A = (ad - bc)I$ を得る．ここで，$a + d \neq 0$ とすると，$A = \frac{ad-bc}{a+d} I$ と書ける．仮に，$ad - bc \neq 0$ だとする．このとき，$k = \frac{ad-bc}{a+d}$ と置けば，$k \neq 0$ で，A^2 は，$k^2 I \neq O$ となる．これは，仮定に反する．$ad - bc = 0$ と仮定すれば，$A = O$ となる．これも仮定に反する．したがって，$a + d = 0$ でなければならない．このとき，$ad - bc = 0$ となる．したがって，A の条件としては，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ かつ $a^2 + bc = 0$ かつ a, b, c の少なくとも一つは 0 ではない，ことが必要であるが，これが十分であることもすぐわかる．(各自確かめよ．)

$\boxed{3}$ 答えのみ． (1) 80 (2) $2(x + y + z)^3$

$\boxed{4}$

(1) 逆行列の公式

$n \times n$ 行列 A が正則のとき，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\Delta_{ji})_{i,j=1,\ldots,n}$$

ただし，Δ_{ji} は，A の (j,i)-余因子を表す．

逆行列の公式より，

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 8 & 11 & -10 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

と計算される．

(2) 答えのみ．

$$\frac{1}{80}\begin{pmatrix} 57 & -28 & -47 & 16 \\ -15 & 20 & 25 & 0 \\ 50 & -40 & -30 & 0 \\ 82 & -88 & -62 & 16 \end{pmatrix}$$

$\boxed{5}$ (略解)

$A = (a_{ij})$ $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$, $B = (b_{ij})$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, l)$ とおく．

$1 \leq i \leq m_1$, $1 \leq j \leq l_1$ のとき，AB の (i,j)-成分が，$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$ の (i,j)-成分となることを確かめる．(その他の場合も同様に確かめることが出来る．各自試みよ．)

以下，$1 \leq i \leq m_1$, $1 \leq j \leq l_1$ とする．

$$\begin{aligned} AB \text{ の } (i,j)-\text{成分} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} a_{ik}b_{kj} \\ &= A_{11}B_{11}\text{の } (i,j)-\text{成分} + A_{12}B_{21}\text{の } (i,j)-\text{成分} \end{aligned}$$

よって，示せた．