

線形数学 I 中間テスト

総合科学部 数理・情報科学科
佐藤 信哉

試験時間は 90 分．教科書・参考書およびノートなど一切の持ち込み不可．
行列あるいは行列式において，基本変形をする際は，どのような変形を施したか明確に記すこと．また，説明なく答えのみ書いてある答案には点は与えない．必ず説明を書くこと．

1 次の x, y, z, w を未知変数とする連立 1 次方程式が解を持つように a の値を定めよ．また，このときの解を求めよ．

$$\begin{cases} x + y + z + 2w = -1 \\ 2x + y - 2z - w = 3 \\ 4x + 3y + 3w = 1 \\ 3x + 2y - z + w = a \end{cases}$$

2 A, B を正方行列とする． A, B が，次の関係式を満たすとき， $A^m + B^m$ (m は自然数) を求めよ．

$$A + B = O, AB = I.$$

ここで， O はゼロ行列， I は単位行列を表す．

3 行列について，以下の問いに答えよ．

(1) 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) 次を示せ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1$$

4 次行列の逆行列を求めよ。

(1)

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5 U を複素数を成分に持つ $n \times n$ 行列とする。 \bar{U} で U の成分をすべて複素共役にした行列とする。そして、 U^* を ${}^t\bar{U}$ で定める。このとき、次を示せ。

$$\det(U^*U) \geq 0$$