# 物理計測論（CB113）
# 2015 年度秋学期　期末試験問題

担当　平山孝人

2016 年 1 月 25 日

**注意：**

- 問題用紙 1 枚，解答用紙 3 枚，グラフ用紙 1 枚，計算用紙 1 枚，問題数２題＋ $\alpha$。
- 解答用紙３枚およびグラフ用紙の全てに氏名・学生番号を記入せよ。
- **問題文で定義されていない記号を用いるときは必ず定義をしてから使うこと。**
- 解答には結果だけでなく，考え方の筋道も書くこと。**結果だけの解答には点数を与えないことがある。**
- 必要ならば以下の式を用いよ。記号の意味は，講義で使ったものと同じである。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}\exp\left[-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad w_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-n} \qquad w_a(n) = \exp(-a)\frac{a^n}{n!}$$

## I. 以下の問いに答えよ。

(a) 長さ 45.30 mm と 1.2 cm と 1.08 m の３本の棒を直線につなげた時の全体の長さを m の単位で求めよ。

(b) ある放射線源から放出される信号を 1 秒間計数したところ，293 個あった。放射線源を取り除いてバックグラウンドを 1 秒間計数すると 107 個だった。放射線源から 1 秒間に放射される真の放射線の数と，その誤差を求めよ。

(c) 質量 $(8.06 \pm 0.21)$ kg の物体が速度 $(6.1 \pm 0.2)$ m/s で等速直線運動している。この物体の運動エネルギーを誤差付きで求めよ。

(d) A student measured a physical quantity and obtained the following values.

12.3,　11.4,　12.7,　11.5,　11.8,　11.1

i. Calculate the mean (average) of the distribution $\bar{x}$, the standard deviation of the sample $s$, the standard deviation of the distribution $\sigma$, and the standard error in the mean $\sigma_{\mathrm{m}}$.

ii. What is the probability that a single measurement lies in the following ranges?

(i) 11.2 – 13.0　(ii) 10.6 – 11.2　(iii) 11.2 – 17.8　(iv) 11.8 – 11.9

(e) ポワソン分布が規格化された関数になっていることを示せ。必要ならば以下の式を用いて良い。

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

(f) 1 秒間に平均 2.3 個の放射線を放出する放射線源がある。1 秒間に 0 個, 1 個, 2 個, 3 個の放射線を放出する確率を求めよ。また，1 秒間に 4 個以上の放射線を放出する確率を求めよ。

(g) In the following examples, $F$ is a given function of the independently measured quantities $X$, $Y$ and $Z$ with the standard deviations $\Delta X$, $\Delta Y$ and $\Delta Z$, respectively. Calculate the standard deviation $\Delta F$ or $\dfrac{\Delta F}{F}$.

i. $F = 3X + 5Y - 2Z$　ii. $F = \dfrac{2X^3Y}{3Z^{3/2}}$　iii. $F = 2\ln(3X)$　iv. $F = X\exp(2Y)$

II. 天井から吊るされたバネに重りを取り付け，重りの質量と重りから天井までの距離の関係からバネ定数 $k$ を求める実験をした。重りの質量の測定誤差は無視できるほど小さく，重りの大きさは無視できるものとする。また，バネの質量は無視できるほど軽く，この実験の範囲内ではフックの法則 $(F = kx)$ が成り立つものとする。測定結果は以下の表のようになった。

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 重りの質量 $m$ (g) | 100 | 200 | 400 | 600 |
| 天井から重りまでの距離 $x$ (cm) | 11.2 | 16.1 | 16.9 | 27.4 |
| 距離 $x$ の誤差 $\Delta x$ (cm) | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 3.0 |

重力加速度 $g = 9.80$ (m/s$^2$) として，以下の問いに答えよ。

(a) 配布したグラフ用紙に，横軸 $m$，縦軸 $x$ として測定結果をプロットせよ。横軸，縦軸には目盛り・単位・説明を入れ，全ての測定点に誤差棒をつけること。

(b) 最小自乗法を用いてバネ定数 $k$ とバネの自然長 $x_0$ を誤差付きで求めよ。答えには SI 単位系での単位（$k$ は J/m で，$x_0$ は m で）をつけること。測定量 $x, y$ に対して $y = ax + b$ の関係がある場合，最小自乗法を用いて求めた最適な $a, b$ および $\sigma_a, \sigma_b$ は以下の式で求められる。記号の意味は，講義で使ったものと同じである。

$$a = \left( \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right) \Big/ \Delta \qquad b = \left( \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \right) \Big/ \Delta$$

$$\sigma_a = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left( \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \Big/ \Delta} \qquad \sigma_b = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left( \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right) \Big/ \Delta}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} - \left( \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2$$

(c) 最小自乗法を用いて求めた最適直線を，(a) で作成したグラフに書き加えよ。

(d) $\chi^2$ 検定を行い，この実験における誤差の見積もりが正しいかどうか議論せよ。最小自乗法における $\chi^2$ は

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left[ y_i - (a x_i + b) \right]^2}{\sigma_i^2}$$

で求めることができる。

(e) この実験の誤差の見積もりが正しいかどうかは，$\chi^2$ 検定を行わなくても (c) で書いたグラフを見ることで判断することができる。誤差の見積もりが正しいかどうかを，その理由とともに述べよ。

(f) $m = 600$ (g) の測定における誤差が $\pm 3.0$ (cm) ではなく $\pm 1.0$ (cm) だった場合，最小自乗法で求めた最適直線の傾きは大きくなるか，小さくなるか答えよ。またその理由を定性的に述べよ（計算は必要ない）。

III. このテスト問題を批評せよ。有意な内容の場合は加点する。無記入でも何が書いてあっても減点することはない。