物理計測論（CB113）
2018年度秋学期　期末試験問題

担当　平山孝人

2019年1月28日

注意：

- 問題用紙1枚，解答用紙3枚，グラフ用紙1枚，計算用紙1枚，問題数3題＋α。
- 解答用紙3枚およびグラフ用紙の全てに氏名・学生番号を記入せよ。
- 問題文で定義されていない記号を用いるときは必ず定義をしてから使うこと。
- 解答には結果だけでなく，考え方の筋道も書くこと。結果だけの解答には点数を与えないことがある。
- 必要ならば以下の数式，数値を用いよ。記号の意味は，講義で使ったものと同じである。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}\exp\left[-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad w_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-n} \qquad w_a(n) = \exp(-a)\frac{a^n}{n!} \qquad \chi^2 = \sum_{k=1}^{K}\frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

0.683, 0.954, 0.9973

I. 以下の問いに答えよ。

(a) 有効数字を考慮して以下の計算をせよ。結果には単位を付けること。

i. 質量 (960 ± 21) g の容器に水を入れたときの質量が (1.032 ± 0.028) kg だった。入れた水の質量を誤差付きで求めよ。

ii. 質量 (1.3 ± 0.1) kg の物体を床から (1.35 ± 0.11) m の高さから初速度 0 で自由落下させた。床に到達した時の物体の持つ運動エネルギーを誤差付きで求めよ。重力加速度 g を 9.807 m/s^2 とする。

iii. 直径が約 10mm の円の面積を 1 %の精度で求めたい。このとき，直径は何 mm の精度で測定する必要があるか。

(b) 標本の標準偏差 s，分布の標準偏差 σ，標準誤差 σ_m の意味を，数式を使わずにそれぞれ説明せよ。

(c) 10個のサイコロを5回投げたところ，1の目が出た個数が2個，3個，2個，1個，2個だった。1の目が出た個数の平均値と，1の目が出る期待値をそれぞれ求めよ。［有効数字は2桁］

(d) 2011年3月に，^{137}Cs を含む物質から放出される放射線の数を測定したところ1分間に100個だった。^{137}Cs の半減期を30年として，現在（2019年1月，7.83年経過）同じ物質を測定した際に予想される1分あたりの信号数を求めよ。また2011年3月の測定結果に比べて「減った」と言うためには，何分以上測定すればよいか。なお半減期 T の放射性同位元素の時間 t における崩壊数 $N(t)$ は以下の式で求められる。

$$N(t) = N(0)\exp\left(-\frac{t}{T}\ln 2\right)$$

(e) n 回の測定によって得られた n 個の測定値の平均値を求める。(i) 測定値 x_i を使う方法，(ii) 測定値 x_j の頻度 $F(x_j)$ を使う方法，(iii) 測定値 x_j の割合 $f(x_j)$ を使う方法，それぞれについて，平均値を求める式を書け。

(f) In the following examples, F is a given function of the independently measured quantities x, y, z with the standard deviations Δx, Δy, and Δz, respectively. Calculate the standard deviation ΔF or $\Delta F/F$.

(i) $F = 3x - 2y$ 　　(ii) $F = \dfrac{3z}{2x^2y^3}$ 　　(iii) $F = x\ln(y/3)$

II. 以下の問いに答えよ。

(a) 自然科学系のレポートを書く場合に気をつけなければならない点は何か，簡単に述べよ。

(b) 長さがほぼ等しい 2 本の棒の長さの差をなるべく精度良く測定したい。どのような工夫をして測定すれば良いか記せ。

(c) 実験で測定した値をグラフに書く際に注意すべき点を述べよ。

III. 等速直線運動している物体の位置と時間の関係を測定して速度を求める実験をしたところ，以下の表のような結果が得られた。時間の測定誤差は無視できるほど小さく，位置の測定誤差は全ての測定点で ± 2 m である。

時間 (s)	2	6	8	10
位置 (m)	12	34	52	58
誤差 (m)	2	2	2	2

以下の問いに答えよ。

(a) 配布したグラフ用紙に，横軸時間，縦軸位置として測定結果をプロットせよ。全ての測定点に誤差棒をつけること。［目見当の直線を書く必要は無い。］

(b) 最小自乗法を用いて，この物体の速度を誤差付きで求めよ。結果には単位をつけること。測定量 x, y に対して $y = ax + b$ の関係がある場合，最小自乗法を用いて求めた最適な a, b および σ_a, σ_b は以下の式で求められる。記号の意味は，講義で使ったものと同じである。

$$a = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right) \Big/ \Delta \qquad b = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \right) \Big/ \Delta$$

$$\sigma_a = \sqrt{ \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \right) \Big/ \Delta } \qquad \sigma_b = \sqrt{ \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right) \Big/ \Delta }$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2$$

(c) 最小自乗法を用いて求めた最適直線を，(a) で作成したグラフに書き加えよ。

(d) この測定における誤差の見積もりが適当かどうかは χ^2 検定をしなくても判断可能である。この測定における誤差の見積もりが正しいかどうかを，その理由とともに述べよ。

(e) 時間が 10 s の測定点のみ，位置の測定誤差が ±2 m ではなく ±10 m だった場合，最小自乗法で求めた最適直線の傾きと y 切片の値は大きくなるか，小さくなるか，それぞれ答えよ。またその理由を定性的に述べよ（計算は必要ない）。

IV. ［オプション］このテスト問題を批評せよ。有意な内容の場合は加点する。無記入でも何が書いてあっても減点することはない。