

□1 以下の問に答えよ.

(1) $y = \tan^{-1} x$ は,

$$(1 + x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0$$

を満たすことを示せ.

(2)

$$(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$$

を数学的帰納法を用いて示せ.

□2 以下の関数をマクローリン展開せよ.

(1)

$$2^x$$

(2)

$$(e^x + 1)^2$$

(3)

$$\cos^2 x$$

(4) $\sinh x, \cosh x, \tanh x$

(4) について, $\sin x, \cos x, \tan x$ の展開と比較せよ.

□3 (1) 以下の式を満たす $0 < \theta < 1$ が存在することを示せ.

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + R_{n+1},$$

$$R_{n+1} = (-1)^{n+1} e^{-\theta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(2) 上の結果を使って, $1/e$ を小数 4 桁まで求めよ.

□4 マクローリン展開を用いて, 次の極限值を求めよ.

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)}{x^6}$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^2) - x^2}{x^4}$$